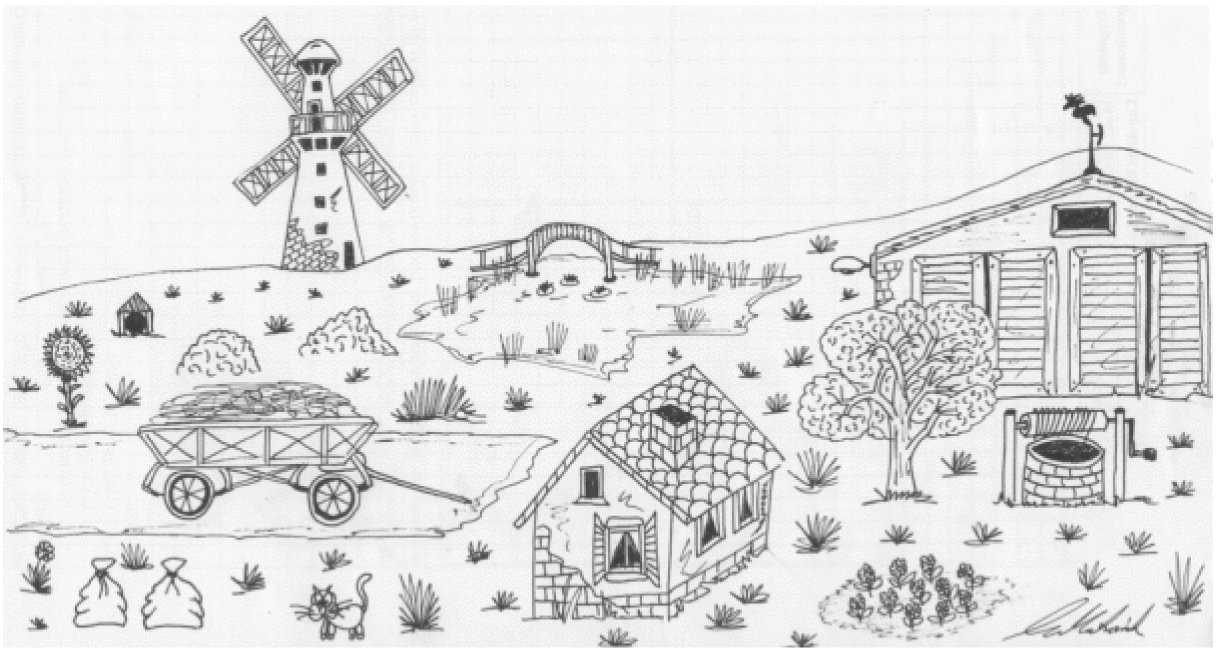
MATURA 2006

Komentarz do zadań z matematyki

LIPIEC 2006

Opracowano w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z wykorzystaniem materiałów otrzymanych z okręgowych komisji egzaminacyjnych



Rysunek powyższy pochodzi z arkusza egzaminacyjnego jednego z tegorocznych zdających. Był to jedyny rezultat intelektualnej pracy podczas egzaminu z matematyki, który zdający dostarczył egzaminatorom do oceny.

WSTĘP

Egzamin maturalny z matematyki odbył się w całym kraju 11 maja 2006 r. i miał formę pisemną. Maturzyści mogli wybrać matematykę jako przedmiot obowiązkowy lub dodatkowy.

Matematyka jako przedmiot **obowiązkowy** mogła być zdawana na poziomie podstawowym lub rozszerzonym.

Egzamin na **poziomie podstawowym** trwał 120 minut i polegał na rozwiązaniu zadań z arkusza I, po tym czasie była przerwa, po zakończeniu której do egzaminu przystąpili ci zdający, którzy podjęli decyzję zdawania matematyki na **poziomie rozszerzonym**. W ciągu kolejnych 150 minut rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu II. Warunkiem zdania egzaminu było uzyskanie co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia na poziomie podstawowym; nie określono progu zaliczenia dla poziomu rozszerzonego.

Zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot dodatkowy, zdawali egzamin na **poziomie rozszerzonym**. Egzamin trwał 270 minut i składał się z dwóch części, pierwsza 120 minut, druga 150 minut. W pierwszej części zdający rozwiązywał arkusz I, w drugiej arkusz II. Były to te same arkusze, które rozwiązywali uczniowie zdający matematykę jako przedmiot obowiązkowy. Dla przedmiotu zdawanego jako dodatkowy nie określono progu zaliczenia.

OPIS ARKUSZY EGZAMINACYJNYCH

Zadania zawarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzały umiejętności odpowiadające standardom wymagań:

- pozwalały wykazać się znajomością i rozumieniem podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz umiejętnością ich stosowania podczas rozwiązywania problemów matematycznych,
- sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania tekstów matematycznych, sprawność rozwiązywania zadań, oraz przetwarzania informacji pochodzących z różnych źródeł, takich jak tabele, schematy, wykresy,
- sprawdzały umiejętność analizowania i rozwiązywania problemów, argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego, podawania opisu matematycznego danej sytuacji, dobierania algorytmów do wskazanej sytuacji problemowej i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

Arkusze egzaminacyjne dostępne są na stronie CKE www.cke.edu.pl .

Arkusz I – poziom podstawy

Arkusz I (czas trwania egzaminu 120 minut) zawierał 11 zadań, wyłącznie otwartych. Sprawdzały one wiadomości i umiejętności opisane w standardach wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego.

Zadania egzaminacyjne w arkuszu I sprawdzały przede wszystkim znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych oraz formułowania opisu matematycznego danej sytuacji.

Tematyka zadań egzaminacyjnych w arkuszu I obejmowała większość treści z Podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące liczb i ich zbiorów, funkcji i ich własności, wielomianów, planimetrii oraz rachunku prawdopodobieństwa z elementami statystyki.

Zadanie 1. (*3 pkt*)

Dane są zbiory: $A = \left\{ x \in R : \ \left| x - 4 \right| \geq 7 \right\}$, $B = \left\{ x \in R : \ x^2 > 0 \right\}$.

Zaznacz na osi liczbowej:

a) zbiór A,
b) zbiór B,
c) zbiór $C = B \setminus A$.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II 2a:

- zaznaczania na osi liczbowej zbioru opisanego za pomocą nierówności z wartością bezwzględną,
- zaznaczania na osi liczbowej zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej,
- wyznaczania różnicy zbiorów i zaznaczania jej na osi liczbowej.

Łatwość zadania

0,62 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający zaznaczyli na osiach liczbowych zbiory, które zostały zapisane za pomocą nierówności z wartością bezwzględną $\left| x - 4 \right| \geq 7$ oraz nierówności kwadratowej $x^2 > 0$. Poprawnie wyznaczyli i zaznaczyli na osi liczbowej zbiór $C = B \setminus A$.

Najczęściej powtarzające się błędy

Liczna grupa zdających popełniła błędy rozwiązując nierówność $x^2 > 0$. Najczęściej podawane złe odpowiedzi to : $x > 0$ lub $x \in R$, ale zdarzały się również odpowiedzi $x < 0$.
Świadczy to o słabym opanowaniu umiejętności rozwiązywania nierówności kwadratowych.
Zdający mieli również poważne trudności z wyznaczeniem na osi liczbowej różnicy zbiorów. Nie potrafili prawidłowo określić, czy końce przedziału należą do zbioru C . Niektórzy zdający poprawnie wyznaczali zbiory *A, B* oraz wskazaną różnicę, zapisali je w postaci przedziałów liczbowych, ale nie zaznaczyli ich na osi liczbowej.

Komentarz

Błędy w wyznaczaniu różnicy zbiorów wynikają najczęściej z braku zrozumienia tego pojęcia. Można również wnioskować, że zdający nie mają utrwalonego nawyku sprawdzania, czy podana przez nich odpowiedź jest odpowiedzią na wszystkie pytania zawarte w treści zadania.

Zadanie 2. *(3 pkt)*

W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami:

- poprawnego zbudowania modelu matematycznego,
- obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia losowego.

Są to umiejętności opisane kolejno w standardzie II 1a oraz II 2a.

Łatwość zadania
0,52 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdający, którzy potrafili poprawnie zinterpretować tekst zadania zapisali, że elementami zbioru zdarzeń elementarnych są trzyelementowe kombinacje zbioru szesnastoelementowego. Moc zbioru zdarzeń sprzyjających zdarzeniu opisanemu w zadaniu została wyznaczona jako $\binom{4}{2}\cdot 12$.

Często spotykaną metodą rozwiązania było budowanie modelu za pomocą drzewa – grafu ilustrującego doświadczenie losowe i obliczenie prawdopodobieństwa.

Najczęściej powtarzające się błędy
Najczęściej powtarzającym się błędem było nieprawidłowe wyznaczenie liczby sposobów wyboru trzech osób spośród szesnastu, z uwzględnieniem założenia, że dwie z nich znają okolicę. Zdający wiedzieli, iż przy wyznaczaniu tej liczby należy skorzystać ze wzoru na kombinacje, ale nie potrafili zastosować tej wiedzy do sytuacji opisanej w zadaniu.
W przypadku rozwiązywania zadania metodą drzewa zdający w wielu przypadkach nie zaznaczyli wszystkich gałęzi niezbędnych do opisania zdarzenia losowego lub przyporządkowali gałęziom nieprawidłowe prawdopodobieństwa i w konsekwencji otrzymali błędne wyniki.

Komentarz
Na podstawie analizy popełnionych błędów można wnioskować, że zdający w niewystarczającym stopniu mają utrwaloną umiejętność budowania modelu tzn. określania zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, obliczania liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu, stosowania wzorów kombinatorycznych, bądź też nie potrafią poprawnie zinterpretować sytuacji praktycznej za pomocą drzewa.

Zadanie 3. (*5 pkt*)

Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła (w dag)	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.
b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdzane umiejętności Pierwsze dwie badane umiejętności opisane są w standardzie I: • obliczanie średniej arytmetycznej danego zbioru, • obliczanie odchylenia standardowego danej próby. Ponadto zdający miał się wykazać umiejętnościami: • stosowania definicji średniej ważonej oraz odchylenia standardowego z danej próby – standard II 1a. • ocenienia przydatności otrzymanych wyników i napisania odpowiedzi na postawione pytanie – standard III 2a.
Łatwość zadania 0,68 - umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających: Zdający poprawnie odczytali dane z tabeli i prawidłowo obliczali średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe. Odpowiadając na pytanie zawarte w podpunkcie b) poprawnie interpretowali wyniki statystyczne.
Najczęściej powtarzające się błędy Nieprawidłowe stosowanie wzoru na wariancję, które w konsekwencji prowadziło do błędnego obliczenia odchylenia standardowego. Pojawiały się liczne błędy rachunkowe.
Komentarz Zadanie, w którym badane są tego typu umiejętności, pojawiło się na egzaminie maturalnym już po raz kolejny. Mimo to zdający mieli trudności z prawidłowym zastosowaniem wzoru na obliczanie wariancji.

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.

a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
b) Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
c) Oblicz wyraz a_6.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w standardzie II 2a:

- wyznaczania ilorazu ciągu geometrycznego z wykorzystaniem informacji o jego monotoniczności,

oraz umiejętnościami ze standardu I:

- zapisywania wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego,
- wykonywania działań na liczbach rzeczywistych.

Łatwość zadania
0,84 –łatwe

Typowe poprawne odpowiedzi zdających:
Zdający po zinterpretowaniu treści zadania zapisali równanie kwadratowe, które bezpośrednio wynikało z własności ciągów geometrycznych. Rozwiązaniem tego równania są dwie wartości, jakie może przyjmować iloraz ciągu q. Zgodnie z założeniem zapisanym w treści zadania (ciąg jest rosnący) wybrali dodatnią wartość q. Obliczenie kolejnych wyrazów ciągu wymagało stosowania wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ znajdującego się w „Zestawie wzorów matematycznych”.

Najczęściej powtarzające się błędy
Najczęstszym błędem, który popełniali zdający było nieodrzucenie ujemnego pierwiastka równania $q^2 = \frac{9}{4}$ w rozwiązaniu zadania. Przy ujemnej wartości q ciąg nie spełnia warunku monotoniczności podanego w zadaniu (ciąg rosnący). Świadczy to o pobieżnej analizie treści zadania lub niezrozumieniu pojęcia monotoniczności ciągu.
Zdarzyły się również rozwiązania, w których zdający nie wyznaczyli wzoru na n-ty wyraz ciągu.

Komentarz
Zadanie było łatwe, a błędy wystąpiły z powodu nieuważnego czytania treści zadania lub braku powiązania rozwiązania z założeniami opisanymi w zadaniu.

Zadanie 5. (*3 pkt*)

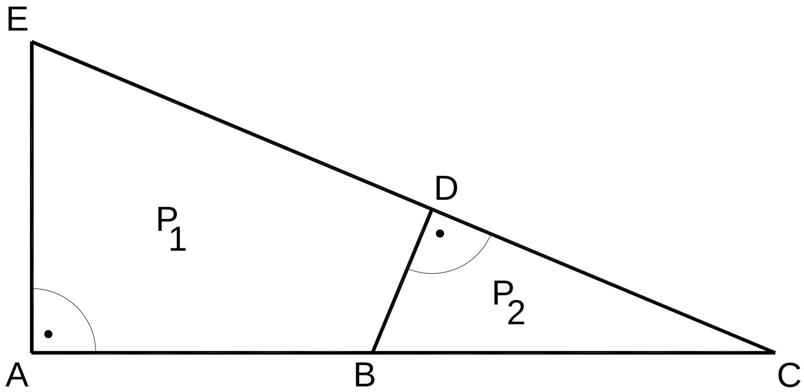
Wiedząc, że $0^o \le \alpha \le 360^o$, $\sin\alpha < 0$ oraz $4\,\mathrm{tg}\,\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

a) oblicz $\mathrm{tg}\,\alpha$,
b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami: • zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta – standard II 2a, • dobrania odpowiedniego algorytmu do wskazanej sytuacji problemowej i ocenienia przydatności otrzymanego wyniku – standard II 1b, • podania współrzędnych punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta – standard I.
Łatwość zadania 0,35 –trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających: Zdający po obliczeniu $\mathrm{tg}\,\alpha$ poprawnie rysowali drugie ramię kąta i na ogół podawali punkt o współrzędnych (–4, –3).
Najczęściej powtarzające się błędy Jednym z najczęściej popełnianych błędów było umieszczenie końcowego ramienia kąta w I ćwiartce układu współrzędnych. Zdający nie brali pod uwagę dodatkowego warunku, który miał być spełniony, tzn. $\sin\alpha < 0$. Konsekwencją popełnianego błędu było bezkrytyczne odczytanie współrzędnych punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta. Zdający nie sprawdzili, czy odpowiedź spełnia wszystkie warunki zadania.
Komentarz Z analizy wielu rozwiązań można wnioskować, że większość zdających nie miała utrwalonego nawyku sprawdzania otrzymanego rozwiązania z warunkami zadania. Zdający poprawnie wyznaczyli wartość $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ a problem pojawił się w rozwiązaniu drugiej części zadania – powiązaniu wartości funkcji trygonometrycznej kąta α z kątem spełniającym warunki zadania.

Zadanie 6. (*7 pkt*)

Państwo Nowakowie przeznaczyli 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1:1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2.



$|AE| = 5$ cm,
$|EC| = 13$ cm,
$|BC| = 6,5$ cm.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami:
- zastosowania pojęcia skali do obliczenia rzeczywistych długości podanych odcinków,
- zamieniania jednostek długości,
- zastosowania twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości jednego z boków trójkąta,
- obliczania pola trójkąta prostokątnego.

Umiejętności te są opisane w standardzie II 2a i 2c.
Sprawdzane były także umiejętności opisane w standardzie III 1b:
- wykorzystania podobieństwa trójkątów do wyznaczenia skali podobieństwa,
- obliczania pola trójkąta z wykorzystaniem podobieństwa,

oraz umiejętność opisana w standardzie I:
- porównywanie liczb wymiernych.

Łatwość zadania
0,63 –umiarkowanie trudne

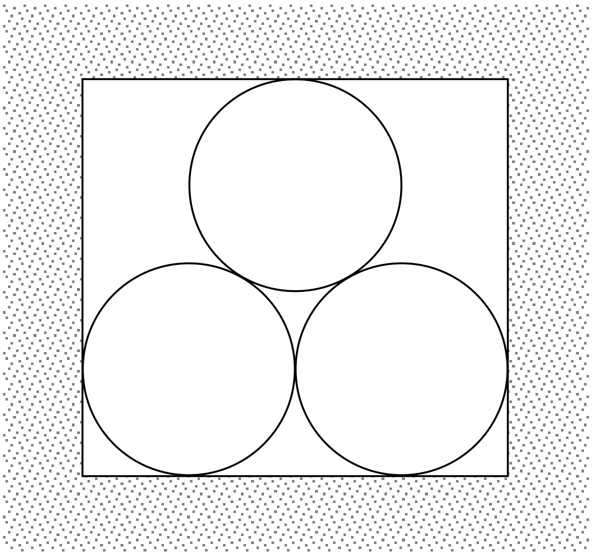
Typowe poprawne odpowiedzi zdających
W większości prac zdający posłużyli się, do rozwiązania tego zadania, podobieństwem trójkątów i twierdzeniem Pitagorasa. Stosowali twierdzenie o stosunku pól figur podobnych. Poprawnie przeliczali długości odcinków i pola powierzchni trójkątów używając podanej w zadaniu skali.
W wielu przypadkach posługiwali się w rozwiązaniu definicją funkcji trygonometrycznej, wprowadzając jako parametr kąt ostry $|\sphericalangle BCD| = \alpha$ oraz twierdzeniem Pitagorasa.

Najczęściej powtarzające się błędy
Nieprawidłowa zamiana jednostek długości i pola przy danej skali podobieństwa jest bardzo częstym błędem popełnianym w tym zadaniu.
Po stwierdzeniu podobieństwa trójkątów zdający nie potrafili określić, które boki w trójkątach podobnych są odpowiednie i błędnie zapisywali wynikającą z podanej własności proporcję.

Komentarz
Z analizy wielu rozwiązań można wnioskować, że zdający nie mieli w wystarczającym stopniu utrwalonych umiejętności rozwiązywania typowych zadań z planimetrii. Większość z nich zauważała podobieństwo trójkątów, ale problemem było ułożenie właściwych proporcji oraz poprawne zastosowanie skali podobieństwa.

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do 0,01 m.



Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami: • budowania opisu matematycznego danej sytuacji praktycznej – standard III 1a, • wyznaczania wysokości trójkąta równobocznego – standard I, oraz umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2a i 2c: • obliczania szerokości i wysokości figury opisanej w zadaniu, • zaokrąglania wyniku z zadaną dokładnością.
Łatwość zadania 0,49 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający po analizie warunków zadania zauważyli, że po połączeniu środków okręgów powstaje trójkąt równoboczny. Zapisywali szerokość kanału jako podwojoną średnicę rury, a wysokość jako sumę średnicy rury i wysokości wyznaczonego trójkąta.
Najczęściej powtarzające się błędy Najczęściej zdający przyjmowali długość promienia okręgu jako 1 m (mylili promień ze średnicą), a przy wyznaczaniu wysokości trójkąta równobocznego nie widzieli związku tej wysokości z promieniem okręgu, co w konsekwencji prowadziło do otrzymania błędnych wyników.
Komentarz Zdający mieli trudności z zastosowaniem podstawowych wiadomości i umiejętności z geometrii w sytuacji praktycznej. Często nie podejmowali próby rozwiązania tego zadania lub poprawnie wyznaczali tylko jeden wymiar – szerokość kanału. Wyznaczenie wysokości kanału było problemem, bo zdający nie zauważyli, że środki okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Zadanie 8. (*5 pkt*)

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami:
- obliczania miejsc zerowych funkcji – standard II 1a,
- obliczania współrzędnych wierzchołka paraboli – standard II 2a,
- przetwarzania informacji przedstawionych w postaci wzoru na postać graficzną – standard III 1c,

oraz umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2b:
- zapisania zbioru wartości funkcji,
- zapisania rozwiązania nierówności kwadratowej.

Łatwość zadania
0,70 – łatwe

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdający obliczyli współrzędne wierzchołka i miejsca zerowe danej funkcji kwadratowej, sporządzili szkic wykresu, który następnie posłużył im do wyznaczenia zbioru wartości funkcji i rozwiązania nierówności.

Najczęściej powtarzające się błędy
Zdający obliczając drugą współrzędną wierzchołka paraboli wstawiali do wzoru $q_w = \frac{-\Delta}{4a}$ wartość $\sqrt{\Delta}$, zamiast Δ. W konsekwencji podawali inny zbiór wartości. Zdarzały się odpowiedzi, w których zbiór wartości był podawany w postaci przedziału $\langle 4, -\infty)$.

Równie częstym błędem było odczytanie z wykresu paraboli rozwiązania odpowiadającego nierówności przeciwnej do określonej w zadaniu. Wielu zdających podawało rozwiązanie nierówności ostrej.

Komentarz
Często przy rozwiązywaniu nierówności zdający nie korzystali ze sporządzonego wcześniej wykresu funkcji, lecz ponownie sporządzali jeszcze jeden jej szkic. Zdarzało się, że oba szkice różniły się, np. miały inne miejsca zerowe lub inaczej skierowane ramiona paraboli.

Zadanie 9. (*6 pkt*)

Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60^{o}.

a) Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.
b) Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia $1\ m^2$ potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.

Sprawdzane umiejętności

Zdający miał wykazać się umiejętnościami:

- sporządzenia rysunku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i zaznaczenia kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy – standard I,
- wykorzystania funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym do obliczenia długości przeciwprostokątnej oraz obliczania pola powierzchni bocznej ostrosłupa – standard II 2a i 2c,
- dobrania odpowiedniego algorytmu do wskazanej sytuacji praktycznej i ocenienia przydatności otrzymanego wyniku – standard III 1b,
- obliczania procentu z danej liczby – standard I.

Łatwość zadania

0,73 –łatwe

Typowe poprawne odpowiedzi:

Zdających wykonali rysunek ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i zaznaczyli zadany w zadaniu kąt dwuścienny. Po zauważeniu, że otrzymany przekrój jest trójkątem równobocznym wyznaczyli wysokość ściany bocznej ostrosłupa i obliczyli jego pole powierzchni bocznej. Część zdających wyznaczyła wysokość ściany bocznej używając funkcji cosinus. Wyznaczając liczbę dachówek potrzebnych do pokrycia dachu wykonali obliczenia procentowe. Poprawna odpowiedź była wynikiem porównania i zinterpretowania otrzymanego wyniku z warunkami podanymi w zadaniu.

Najczęściej powtarzające się błędy

Błędem, który zdający popełniali najczęściej było zaznaczenie na rysunku nieprawidłowego kąta. Zamiast kąta dwuściennego między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy zaznaczali kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa. Ponadto zdarzały się rozwiązania w których zdający umieścili w podstawie bryły inny wielokąt, np. trójkąt równoboczny. Przy wyznaczaniu ilości dachówek dokonywali zaokrągleń w dół zgodnie z zasadą matematyczną, a nie realiami zadania. Były również rozwiązania, w których 8% zapasu liczone było w stosunku do jednej ściany, co w konsekwencji przy pomnożeniu przez 4 dawało wynik inny niż w modelu odpowiedzi.

Komentarz

Z analizy wielu rozwiązań można wnioskować, że zdający mają w wystarczającym stopniu utrwalone umiejętności rozwiązywania typowych zadań ze stereometrii i zastosowania tych umiejętności w sytuacji praktycznej.

Zadanie 10. (*6 pkt*)

Liczby 3 i –1 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$.

a) Wyznacz wartości współczynników a i b.
b) Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami:

- posługiwania się definicją pierwiastka wielomianu,
- rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi,
- stosowania twierdzenia Bézouta (wyżej wymienione umiejętności są opisane w standardzie II 1a i 2a),
- dzielenia wielomianu przez wielomian – standard I,
- rozwiązywania równań liniowych – również ze standardu II 2a.

Łatwość zadania
0,61 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających:
Zdający wykorzystali twierdzenie o pierwiastkach wielomianu, zapisali i rozwiązali układ równań wynikający z tego twierdzenia. Po wyznaczeniu współczynników a i b stosowali schemat Hornera lub dzielili wielomian w celu znalezienia trzeciego pierwiastka.

Najczęściej powtarzające się błędy
Błędy popełniane w dzieleniu wielomianów spowodowały brak możliwości znalezienia trzeciego pierwiastka.
Zdający często nie widzieli związku między pierwiastkami wielomianu a jego rozkładem na czynniki. Zapisując wielomian w postaci iloczynowej zapominali o współczynniku przy najwyższej potędze. Zdający stosując twierdzenie o pierwiastkach wielomianu nie przyrównali otrzymanego wyrażenia do zera. Często pojawiały się błędy rachunkowe przy wykonywaniu działań na potęgach i rozwiązywaniu układu równań.

Komentarz
Błędy rachunkowe i nieuwagi popełnione w pierwszej części rozwiązania, np. złe obliczenie wartości wielomianu dla podanego pierwiastka $W(3) = 18 + 9a + 3b + 30$ lub nieprawidłowo rozwiązany układ równań powodowały trudności przy wyznaczaniu trzeciego pierwiastka wielomianu.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Sumę $S=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{301\cdot 304}+\frac{3}{304\cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:

a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S=\frac{4-1}{4\cdot 1}+\frac{7-4}{7\cdot 4}+\frac{10-7}{10\cdot 7}+\ldots+\frac{304-301}{304\cdot 301}+\frac{307-304}{307\cdot 304}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S=\left(\frac{4}{4\cdot 1}-\frac{1}{4\cdot 1}\right)+\left(\frac{7}{7\cdot 4}-\frac{4}{7\cdot 4}\right)+\left(\frac{10}{10\cdot 7}-\frac{7}{10\cdot 7}\right)+\ldots+\left(\frac{304}{304\cdot 301}-\frac{301}{304\cdot 301}\right)+\left(\frac{307}{307\cdot 304}-\frac{304}{307\cdot 304}\right)$$

stąd $S=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{301}-\frac{1}{304}\right)+\left(\frac{1}{304}-\frac{1}{307}\right)$

więc $S=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{301}-\frac{1}{304}+\frac{1}{304}-\frac{1}{307}$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim $S=1-\frac{1}{307}=\frac{306}{307}$.

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę $S_1=\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{281\cdot 285}$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu badane były umiejętności ze standardu II 1b. Zdający miał wykazać się umiejętnością stosowania przedstawionego algorytmu do rozwiązania problemu.
Łatwość zadania 0,90 –bardzo łatwe
Typowe poprawne odpowiedzi zdających: Zdający, wzorując się na przedstawionym w zadaniu algorytmie poprawnie rozłożyli składniki sumy ułamków na różnice i dokonali redukcji. Obliczenie sumy S_1 w ostatnim etapie nie sprawiało im żadnej trudności.
Najczęściej powtarzające się błędy Część zdających nie zapisała całego rozwiązania, poprzestając na zapisaniu ostatecznego wyniku. Mimo jego poprawności nie uzyskali pełnej liczby punktów. Pojawiały się również błędy, które świadczą o niezrozumieniu algorytmu, np. pozostawienie po redukcji pewnej liczby składników sumy, które sąsiadują z wielokropkiem.
Komentarz Analizując wyniki dotychczasowych egzaminów maturalnych można stwierdzić, że zadania, w których zdający mają zastosować przedstawiony algorytm do rozwiązania problemu nie sprawiają zdającym trudności.

Arkusz II – poziom rozszerzony

Arkusz II (czas trwania egzaminu 150 minut) zawierał 10 zadań, wyłącznie otwartych. Sprawdzały one wiadomości i umiejętności opisane w standardach wymagań egzaminacyjnych dla poziomu rozszerzonego.
Zadania egzaminacyjne w arkuszu II sprawdzały przede wszystkim umiejętność poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego oraz argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego.
Tematyka zadań egzaminacyjnych w arkuszu II obejmowała większość treści z Podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące ciągłości i pochodnej funkcji, ciągów liczbowych, planimetrii, funkcji wykładniczej i logarytmicznej oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 12. (*5 pkt*)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór: $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu zdający miał wykazać się umiejętnościami: • stosowania zasady indukcji matematycznej do dowodzenia twierdzenia o liczbach naturalnych – standard I, • wykorzystania założenia indukcyjnego w dowodzie – standard III 2(R), oraz umiejętnością opisaną w standardzie II 2a – stosowanie pojęcia silni w działaniach na liczbach naturalnych.
Łatwość zadania 0,35 –trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających: Zdający poprawnie zastosowali zasadę dowodu indukcyjnego. Wyszczególnili kroki dowodu, i wykazali się umiejętnością stosowania poprawnego języka matematycznego. W dowodzie poprawnie wykorzystali założenie indukcyjne, pojęcie silni oraz działania na wyrażeniach algebraicznych.
Najczęściej powtarzające się błędy Błędy pojawiały się już w pierwszym kroku dowodu indukcyjnego – zdający nie potrafili obliczyć wartości lewej strony równania dla $n = 1$. W zapisie założenia i tezy błędy były związane z nieumiejętnym stosowaniem kwantyfikatorów. Świadczą one o niezrozumieniu idei dowodu indukcyjnego. Występowały błędy związane z wykonywaniem działań na wyrażeniach algebraicznych (wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias) oraz sprawnością wykonywania działań, w których należy wykorzystać definicję silni. Zaskakujące były również i takie rozwiązania, w których zdający sprawdzali prawdziwość twierdzenia dla $n = 2, n = 3, n = 4$, po czym stwierdzali, że wzór jest prawdziwy dla dowolnego naturalnego *n*.
Komentarz W pracach zdających, którzy są absolwentami techników i liceów profilowych najczęściej zadanie to kończono po zapisaniu założenia indukcyjnego i tezy. Wyraźnie widoczny był brak umiejętności przekształcania wyrażeń zawierających symbol silni.

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \le a_n \le b$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu zdający miał wykazać się umiejętnościami: • badania monotoniczności ciągu – standard III 2a, • obliczania granicy ciągu – standard II 2a, oraz umiejętnością opisaną w standardzie III 2b – formułowanie wniosków wynikających z pojęcia granicy i monotoniczności ciągu.
Łatwość zadania 0,38 –trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Badając monotoniczność ciągu zdający wyznaczyli różnicę $a_{n+1} - a_n$ lub iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Poprawnie, na podstawie otrzymanego wyniku, zapisali wniosek dotyczący monotoniczności ciągu. Granicę ciągu zdający wyznaczyli bez kłopotów wykorzystując znane twierdzenia. Rozwiązując podpunkt c) wykorzystali monotoniczność ciągu oraz wcześniej obliczoną granicę do wyznaczenia wartości liczb a i b spełniających nierówność $a \le a_n \le b$.
Najczęściej powtarzające się błędy W podpunkcie a) rozwiązania najczęściej pojawiały się błędy w odejmowaniu wyrażeń wymiernych przy wyznaczaniu różnicy $a_{n+1} - a_n$ lub skracaniu ułamków algebraicznych i wnioskowanie o monotoniczności ciągu przy braku zapisów świadczących o analizie znaku otrzymanego wyniku. Część zdających po obliczeniu trzech początkowych wyrazów ciągu formułowała odpowiedź dotyczącą jego monotoniczności. Badając monotoniczność ciągu z wykorzystaniem pojęcia pochodnej zdający, różniczkowali ciąg, co jest niedopuszczalne.
Komentarz Zaskakujące są błędy pojawiające się w typowej na poziomie rozszerzonym umiejętności jaką jest badanie monotoniczności ciągu. Zdający wnioskowali o monotoniczności tylko na podstawie wypisanych kilku początkowych wyrazów ciągu co jest niedopuszczalne. Widoczny był brak znajomości własności ciągu i granicy ciągu czego konsekwencją była nieumiejętność wyznaczenia liczb a oraz b spełniających warunek $a \le a_n \le b$. Rozwiązania przedstawiane w podpunkcie c) świadczą o tym, że zdający nie zauważyli, że do sformułowania odpowiedzi można było skorzystać z rozumowania przeprowadzonego w podpunktach a) i b) .

Zadanie 14. (*4 pkt)*

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu zdający miał wykazać się umiejętnościami: • sporządzenia wykresu funkcji $y = f(kx)$, • wyznaczania dziedziny funkcji, • sporządzania wykresu funkcji o danym wzorze z zastosowaniem definicji wartości bezwzględnej, • odczytywania z wykresu własności funkcji. Są one opisane w standardzie II 2a wymagań egzaminacyjnych.
Łatwość zadania 0,29 –trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający poprawnie naszkicowali wykres funkcji $y = \sin 2x$ uwzględniając jej dziedzinę, okres, miejsca zerowe oraz zbiór wartości. W drugiej części zadania ,wykorzystując własności wartości bezwzględnej, zapisywali daną funkcję w postaci: $y = \dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \sin 2x > 0 \\ -1 & \text{dla} \quad \sin 2x < 0 \end{cases}$, a następnie sporządzali jej wykres uwzględniając dziedzinę. Rozwiązanie nierówności $\dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x} < 0$ odczytywali z wykresu i zapisywali w postaci sumy przedziałów.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający szkicowali, zamiast wykresu funkcji $y = \sin 2x$, wykresy innych funkcji trygonometrycznych, np. $y = \sin \frac{1}{2} x$, $y = 2\sin x$, a nawet $y = -\cos x$. Podczas sporządzania wykresu funkcji $y = \dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x}$ najczęściej zapominali o uwzględnieniu dziedziny funkcji. Nie zwracali uwagi na to, że wykres miał być sporządzany w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ i w rozwiązywaniu nierówności $\dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x} < 0$ udzielili odpowiedzi odnoszących się do całego zbioru liczb rzeczywistych. Niektórzy zdający zapisali wzór funkcji $y = \dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x}$ następująco: $y = \dfrac{\lvert\sin 2x\rvert}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } x > 0 \\ -1 \text{ gdy } x < 0 \end{cases}$, a następnie rysowali dwa poziome odcinki o długości 2π.
Komentarz W wielu pracach maturalnych widoczny jest brak umiejętności sporządzania wykresu funkcji $y = f(kx)$. Zdający często pomijali podpunkt b) co dowodzi braku zrozumienia pojęcia wartości bezwzględnej.

Zadanie 15. (*4 pkt)*

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami:
- dokonania analizy zadania – standard III 1a,
- stosowania twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym – standard II 2a.

Łatwość zadania
0,48 –trudne

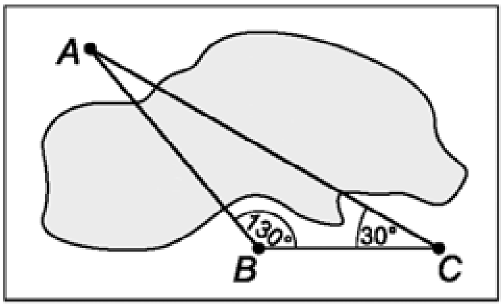
Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Rozwiązując to zadanie zdający wybrali metodę grafu lub stosowali twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Najczęściej powtarzające się błędy
Zdający mieli problem z analizą treści zadania i zbudowaniem odpowiedniego modelu doświadczenia losowego. Pojawiały się próby rozwiązania zadania za pomocą schematu Bernoulliego, błędnie budowano drzewo stochastyczne (np. nie uwzględniano faktu prowadzenia autobusu przez trzech kierowców). Innego typu błędy były związane z niewłaściwym stosowaniem wzoru na prawdopodobieństwo całkowite lub nieznajomością reguły sum i iloczynów w przypadku rozwiązywania zadania metodą drzewa. W wielu pracach widoczne były błędy rachunkowe i błędy w stosowaniu symboliki matematycznej.

Komentarz
W pewnej liczbie prac pojawiały się bezbłędne rozwiązania, w których zdający nie tylko prawidłowo budowali model, ale i opisywali go w sposób czytelny i poprawny językowo, a stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym sprawdzali wszystkie jego założenia.

Zadanie 16. (*3 pkt*)

Obiekty *A* i *B* leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami *B* i *C* jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami *A* i *B* i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



Sprawdzane umiejętności Zdający miał się wykazać umiejętnością: • zastosowania twierdzenia, np. sinusów, do rozwiązania problemu – standard III 1d, oraz umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2a i 2c: • obliczania długości szukanego odcinka, • posługiwania się odpowiednimi miarami oraz przybliżeniami dziesiętnymi.
Łatwość zadania 0,53 –umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Najczęściej stosowaną metodą rozwiązania tego zadania było zastosowanie twierdzenia sinusów. Zdający, którzy wybrali tę metodę bez trudu, w kilku linijkach uzyskiwali poprawny wynik.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający, wybierając do rozwiązania zadania inne własności trójkątów i twierdzenia niż twierdzenie sinusów, nie ocenili ekonomiczności przyjmowanej metody. Rozwiązania były trudne, miały długie obliczenia. W niektórych przypadkach zdający stawali przed koniecznością rozwiązania skomplikowanego układu równań (z których każde było stopnia drugiego) z dwiema niewiadomymi. Często, rozwiązując zadanie, dokonywali zaokrągleń wyników pośrednich, a następnie, używając tych zaokrągleń, rozwiązywali zadanie dalej. Skutkiem takiej kumulacji błędów przybliżeń był niedokładny wynik zadania. W wielu pracach pojawiły się błędy świadczące o kompletnej nieznajomości definicji funkcji trygonometrycznych, np. zdający stosowali definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym do danego trójkąta rozwartokątnego *ABC*. Pojawiały się błędy w odczytywaniu wartości funkcji trygonometrycznych, rozwiązywaniu proporcji i błędy rachunkowe.
Komentarz Twierdzenie sinusów i cosinusów są komplementarne względem siebie przy rozwiązywaniu trójkątów, dlatego podjęcie decyzji, które z nich będzie stosowane do rozwiązywania konkretnego zadania powinno zostać poprzedzone elementarną analizą przydatności każdego z nich.

Zadanie 17. (*6 pkt)*

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

b) Oblicz cosinus $|\sphericalangle CBD|$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał się wykazać umiejętnościami opisanymi w standardzie III 1a i 1b: • podania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci wyrażeń algebraicznych, • dobrania odpowiedniego algorytmu do obliczenia długości ramienia trapezu i długości jego przekątnej, oraz umiejętnością opisaną w standardzie II 2a: • posługiwania się odpowiednim twierdzeniem (np. cosinusów) lub definicją do wyznaczenia cosinusa kąta.
Łatwość zadania 0,11 –bardzo trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających W prawidłowych rozwiązaniach zdający na wstępie wykorzystali własności czworokąta opisanego na okręgu i stosunek podziału ramienia BC przez punkt styczności S do wyznaczenia długości ramienia trapezu oraz długości jego podstaw. Następnie zastosowali twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości przekątnej trapezu. Wyznaczając cosinus $|\sphericalangle CBD|$ zastosowali twierdzenie cosinusów lub definicję tej funkcji w trójkącie prostokątnym.
Najczęściej powtarzające się błędy Błędy pojawiające się w tym zadaniu najczęściej wiązały się z niepoprawną interpretacją treści zadania. Ci zdający, którzy powierzchownie przeprowadzili analizę warunków zadania mieli trudności z wykorzystaniem danego stosunku odcinków CS i BS (wprowadzali na przykład konkretne długości tych odcinków). Nie potrafili poprawnie zastosować twierdzenia o czworokącie wypukłym opisanym na okręgu. Pojawiały się błędy w drugiej fazie rozwiązywania zadania związane z niepoprawnym stosowaniem twierdzenia cosinusów lub wyznaczeniem cosinusa niewłaściwego kąta. Prace zdających zawierały wiele błędów rachunkowych.
Komentarz Zadanie to zmuszało zdających do głębszej analizy jego treści i zaplanowania kolejnych kroków rozwiązania. Często zadanie kończyło się tylko zapisem warunku wpisania okręgu w trapez bez wskazania możliwości wykorzystania tej zależności do rozwiązania zadania. Inni zdający kończyli rozwiązywanie zadania na etapie wyznaczenia długości ramienia trapezu. Wiele prac zawierało bardzo chaotycznie prowadzone próby rozwiązania. Nie prowadziły one do rozwiązania postawionych przed zdającym problemów.

Zadanie 18. (*7 pkt*)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

Sprawdzane umiejętności

Zdający miał się wykazać umiejętnościami:

- rozróżniania brył i zapisywania wzoru na pole powierzchni i objętość opisanego w zadaniu graniastosłupa – standard I,
- opisywania zależności za pomocą funkcji – standard III 1c,
- obliczania pochodnej funkcji wymiernej – standard II 2a,
- wykorzystywania związku pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji – standard III 1d,
- obliczania wymiarów szukanej bryły – standard I.

Łatwość zadania

0,33 –trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Po naszkicowaniu graniastosłupa i wprowadzeniu oznaczeń zdający zapisali równanie opisujące zależność objętości bryły od długości jednej z jej krawędzi (krawędzi podstawy lub wysokości). Następnie, zgodnie ze znaną metodą rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, określili funkcję (pole powierzchni całkowitej), obliczyli pochodną tej funkcji, wyznaczyli jej miejsce zerowe i uzasadnili, że dla wyznaczonej wartości osiąga ona ekstremum lokalne (minimum), które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji. W odpowiedzi podali wymiary graniastosłupa, który przy podanej objętości ma najmniejsze pole.

Najczęściej powtarzające się błędy

Najczęściej pojawiały się błędy związane z obliczeniem pochodnej funkcji (w tym błędy w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych), brakiem określenia dziedziny wyznaczonej funkcji, brakiem uzasadnienia istnienia najmniejszej wartości badanej funkcji (między innymi zdający nie pokazali związku znaku pochodnej z monotonicznością funkcji). Zdający otrzymali, w toku rozwiązywania, długości boków wyrażone liczbą ujemną. Zapisali takie odpowiedzi nie weryfikując ich poprawności.

Duża grupa zdających rozważała ostrosłup prawidłowy trójkątny zamiast graniastosłupa. Utrudniło to znacznie rozwiązanie zadania i praktycznie uniemożliwiło uczniom wykazanie się umiejętnością rozwiązywania zadań optymalizacyjnych. Zaskakujące były błędy w zapisie wzorów na pole i objętość graniastosłupa (znajdowały się w zestawie wzorów) i niepoprawny zapis podstawowego wzoru w zakresie geometrii płaskiej – wzoru na pole trójkąta równobocznego.

Komentarz

Zadania optymalizacyjne to na poziomie rozszerzonym zadania typowe. Zdający rozpoznają takie zadania i stosują znaną procedurę. Dlatego muszą dziwić rozwiązania, w których zdający zakładali na przykład, że wysokość graniastosłupa jest równa krawędzi jego podstawy, albo też, że pole podstawy graniastosłupa jest konkretną liczbą. W obu tych przypadkach problem optymalizacji znikał samoistnie.

Zadanie 19. (*7 pkt*)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2),$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru *k,* dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Sprawdzane umiejętności Zdający miał się wykazać umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2a: • posługiwania się definicją ciągu geometrycznego w celu wyznaczenia jego ilorazu, • określenia dziedziny funkcji logarytmicznej, • wykorzystania definicji logarytmu i własności funkcji logarytmicznej do rozwiązania prostych równań lub nierówności, • podania warunku istnienia sumy szeregu geometrycznego – standard I, i ponownie ze standardu II 2a oraz II 2b : • rozwiązywania nierówności logarytmicznej z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej, • formułowania wniosków oraz zapisywania odpowiedzi.
Łatwość zadania 0,28 –trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Poprawne rozwiązanie zadania rozpoczynało się od obliczenia ilorazu ciągu $q = \log_2(k-2)$ i wyznaczenia dziedziny funkcji $f(k) = \log_2(k-2)$. W dalszej kolejności zdający rozwiązali warunek $\log_2(k-2) \neq 0$ (wszystkie wyrazy ciągu są różne od zera). Następnie prawidłowo zapisali i rozwiązali warunek istnienia sumy wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego $\lvert\log_2(k-2)\rvert < 1$. Znajdowali część wspólną rozwiązania nierówności z jej dziedziną i uwzględniając warunek $a_n \neq 0$ dla każdego $n \geq 1$ zapisali odpowiedź.
Najczęściej powtarzające się błędy Większość zdających nie uwzględniła w rozwiązaniu informacji, iż wszystkie wyrazy ciągu są różne od zera. Nie wszyscy zdający potrafili rozwiązywać nierówność z wartością bezwzględną. Pojawiały się zapisy $\lvert\log_2(k-2)\rvert < 1 \ \Leftrightarrow\ \log_2(k-2) < 1$. Zdający popełniali również błędy w rozwiązaniach prostych nierówności logarytmicznych. Mieli kłopoty z udzieleniem końcowej odpowiedzi, uwzględniającej wszystkie poczynione założenia.
Komentarz Analiza tego zadania okazała się dla zdających trudna. Pominęli w rozwiązaniu dwa ważne elementy. Pierwszy, to wyznaczenie dziedziny funkcji logarytmicznej, drugi to rozwiązanie opisanego w treści zadania warunku (wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera). Wydaje się, że zagadnienia związane z pojęciem logarytmu nie były dostatecznie utrwalone.

Zadanie 20. (*4 pkt*)

Dane są funkcje $f(x)=3^{x^2-5x}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$.

Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał się wykazać umiejętnościami:
- zapisania nierówności wynikającej z treści zadania – standard II 2)R,
- rozwiązania nierówności wykładniczej – standard II 2a,
- rozwiązywania nierówności kwadratowej – standard II 2a.

Łatwość zadania
0,63 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający zapisali warunki zadania w postaci nierówności $3^{x^2-5x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$ a następnie ją rozwiązali ujednolicając podstawę potęgi po obu stronach nierówności. Po wykorzystaniu monotoniczności funkcji wykładniczej i opuszczeniu podstaw rozwiązali nierówność kwadratową.

Najczęściej powtarzające się błędy

Zdający najczęściej popełniali błędy w przekształcaniu potęg, np. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}=3$ lub $\frac{1}{9}=3^{-\frac{1}{2}}$.

Sprowadzali też podstawy potęg po obu stronach nierówności do liczby $\frac{1}{9}$, a potem, w rozwiązywaniu nierówności, błędnie korzystali z monotoniczność funkcji wykładniczej. Pojawiły się też błędy rachunkowe, popełniane głównie podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej.

Komentarz
Rozwiązanie tego zadania nie przysporzyło zdającym wielu kłopotów.
Należy wspomnieć o zdających, którzy szukali drugiego dna w tym zadaniu. Mimo polecenia „oblicz”, co w praktyce oznaczało „rozwiąż nierówność” uzupełniali swoje rozwiązania o bardzo bogate komentarze, przypominające rozwiązania ze „starej matury”. Czyżby obawiali się utraty punktów?

Zadanie 21. (*5 pkt*)

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- f jest funkcją nieparzystą,
- f jest funkcją ciągłą

oraz:

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,

$f'(-3) = f'(-1) = 0$,

$f(-8) = 0$,

$f(-3) = -2$,

$f(-2) = 0$,

$f(-1) = 1$.

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał się wykazać umiejętnością: • zaznaczania w prostokątnym układzie współrzędnych podanych punktów należących do wykresu funkcji – standard I, oraz umiejętnościami opisanymi w standardzie III 1c : • wykorzystywania związków pochodnej z istnieniem ekstremum i monotonicznością funkcji, • stosowania własności funkcji nieparzystej do sporządzania jej wykresu.
Łatwość zadania 0,53 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający zaznaczyli na rysunku podane w treści zadania punkty, następnie korzystając z różniczkowalności i znaku pochodnej sporządzili wykres funkcji w przedziale $\langle -8, 0)$. Wykorzystując nieparzystość funkcji sporządzili jej wykres z przedziale $\langle 0, 8 \rangle$.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający błędnie zaznaczyli podane punkty w układzie współrzędnych. W ocenianych pracach maturalnych widać brak znajomości pojęcia funkcji nieparzystej. Zdający rysowali wykres funkcji tylko w przedziale $\langle -8; 0 \rangle$ lub nie rysowali fragmentu wykresu w okolicach punktu (0,0). Niekiedy rysując wykres funkcji w przedziale $\langle -8; 0 \rangle$ maturzyści nie uwzględnili jej różniczkowalności. Jednocześnie pojawiła się duża liczba prac, w których zdający zamiast sporządzenia wykresu funkcji dokonywali analizy jej własności tworząc tabelę przebiegu zmienności funkcji w przedziale $\langle -8; 8 \rangle$.

Komentarz

Ostatnie zadanie w arkuszu wymagało od zdających koncentracji i skrupulatności w czytaniu wszystkich warunków, jakie musiał spełniać wykres szukanej funkcji. Brak uwagi przy czytaniu treści zadania prowokował na przykład do rysowania łamanej jako wykresu funkcji. Z kolei kłopoty z zauważeniem, że dana funkcja ma być nieparzysta prowadziły do zapisów typu „ponieważ nie wiem, co się dzieje z funkcją f w przedziale $\langle 0,8 \rangle$, więc rysuję w tym przedziale dowolną krzywą.”.