CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2015

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odp. (1 p.)	
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**A**

Zadanie 2. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\lvert x-a\rvert = b$, $\lvert x-a\rvert > b$, $\lvert x-a\rvert < b$ (1.f).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**A**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**C**

Zadanie 4. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 5. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.f).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**A**

Zadanie 6. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych (2.d).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 7. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 8. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji miejsce zerowe oraz sporządza wykresy funkcji liniowych (4.b,e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**D**

Zadanie 9. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**B**

Zadanie 10. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 11. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 12. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	C	D

Zadanie 13. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicję i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych (6.a).	D	A

Zadanie 14. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d).	D	B

Zadanie 15. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).	D	A

Zadanie 16. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).	B	D

Zadanie 17. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	A	B

Zadanie 18. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty (8.b).	A	C

Zadanie 19. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e).	C	B

Zadanie 20. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f).	A	D

Zadanie 21. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu (8.g).	C	D

Zadanie 22. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	C	A

Zadanie 23. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	D	A

Zadanie 24. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe zestawu danych (10.a).	D	B

Zadanie 25. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenia znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	**B**	**D**

Zadanie 26. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$.

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^2$ oraz a^2-b^2 (2.1).

I sposób rozwiązania

Nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$ przekształcamy w sposób równoważny

$y^2+4x^2-8xy+4y^2\geq 0$,

$y^2+(2x-2y)^2\geq 0$.

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y, gdyż kwadrat każdej liczby jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.
To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $y^2+(2x-2y)^2\geq 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

II sposób rozwiązania

Nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$ możemy potraktować jak nierówność kwadratową z niewiadomą x lub – analogicznie – z niewiadomą y. Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest równy

$\Delta=(-8y)^2-4\cdot 4\cdot(5y^2)=-16y^2\leq 0$.

Stąd i z faktu, że współczynnik przy x^2 trójmianu $f(x)=4x^2-8xy+5y^2$ jest dodatni wynika, że trójmian ten przyjmuje tylko wartości nieujemne. To kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu $f(x)=4x^2-8xy+5y^2$: $\Delta=-16y^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu $f(x)=4x^2-8xy+5y^2$, zapisze, że jest on niedodatni i wyciągnie wniosek, że trójmian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

III sposób rozwiązania
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2\ge 2xy$. Stąd wynika, że prawdziwa jest nierówność
$4x^2+4y^2\ge 8xy$, czyli $4x^2-8xy+4y^2\ge 0$.
Zatem, dla dowolnych liczb x, y mamy
$4x^2-8xy+5y^2\ge 4x^2-8xy+4y^2\ge 0$.
To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy zapisze, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwe są nierówności $4x^2-8xy+5y^2\ge 4x^2-8xy+4y^2$ oraz $4x^2+4y^2\ge 8xy$ (lub $x^2+y^2\ge 2xy$).
Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy przeprowadzi pełny dowód.

IV sposób rozwiązania
Gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0, to nierówność $4x^2-8xy+5y^2\ge 0$ jest prawdziwa, gdyż suma trzech liczb, z których co najmniej dwie są równe 0, a trzecia nieujemna, jest nieujemna.
Gdy liczby x, y są przeciwnych znaków, to $xy<0$, więc $-8xy>0$. Zatem nierówność $4x^2-8xy+5y^2\ge 0$ jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest sumą trzech liczb dodatnich.
Pozostaje wykazać prawdziwość nierówności w przypadku, gdy liczby x, y są tego samego znaku.
Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$\left(2x-\sqrt{5}y\right)^2\ge 0$, czyli $4x^2-4\sqrt{5}xy+5y^2\ge 0$.
Wykażemy teraz prawdziwość nierówności
$4x^2-8xy+5y^2\ge 4x^2-4\sqrt{5}xy+5y^2$,
równoważnie
$-8xy\ge -4\sqrt{5}xy$,
$$xy\le \frac{\sqrt{5}}{2}xy.$$
Skoro x i y są tego samego znaku, to $xy>0$, więc dzieląc obie strony nierówności przez xy, otrzymujemy nierówność równoważną $1\le\frac{\sqrt{5}}{2}$, co jest prawdą. To kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy wykaże prawdziwość nierówności w przypadku, gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0 oraz w przypadku, gdy liczby x, y są przeciwnych znaków, a w przypadku, gdy x, y są tego samego znaku zauważy, że prawdziwa jest nierówność $\left(2x-\sqrt{5}y\right)^2\ge 0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga
Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość nierówności dla konkretnych liczb x i y, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 27. (0–2)
Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x \geq x - 2$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).

Rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie wybranie i zapisanie odpowiedniego zbioru rozwiązań.

Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

<u>I sposób rozwiązania</u> (realizacja pierwszego etapu)
Zapisujemy nierówność w postaci $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$ i znajdujemy pierwiastki trójmianu $2x^2 - 5x + 2$

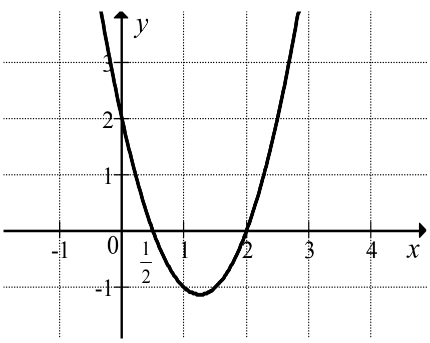
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, stąd $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 1$, stąd $x_1 = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = 2$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie:
  $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ lub $(x-2)(2x-1)$ lub $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$
  lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego $2x^2-5x+2$ i zapisujemy nierówność w postaci, np. $2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\geq 0$, a następnie

- przekształcamy nierówność tak, aby jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej
  $\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}\right]\cdot\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}\right]\geq 0$,
  $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{2}\right)\geq 0$,

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej
  $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\geq\frac{9}{16}$,
  $\left|x-\frac{5}{4}\right|\geq\frac{3}{4}$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2,+\infty\right)$ lub $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2,+\infty\right)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=2x^2-5x+2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
  - zapisze nierówność $\left|x-\frac{5}{4}\right|\geq\frac{3}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x-\frac{5}{4}\right|\leq\frac{3}{4}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 2, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 2, +\infty\right)$

  lub ($x \le \frac{1}{2}$ lub $x \ge 2$),

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności

  w postaci: $x \le \frac{1}{2}$ lub $x \ge 2$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Uwaga

Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x \le \frac{1}{2}$ i $x \ge 2$, $x \le \frac{1}{2}$ oraz $x \ge 2$, itp.

<u>Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

1. Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np.: $\left\langle +\infty, 2\right)$.
2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ i zapisze, np. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 2, +\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. (0–2)

Rozwiąż równanie $4x^3+4x^2-x-1=0$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).

Rozwiązanie (I sposób) „grupowanie wyrazów"

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$x\left(4x^2-1\right)+\left(4x^2-1\right)=0$ lub $4x^2(x+1)-(x+1)=0$.

Stąd $(x+1)\left(4x^2-1\right)=0$, czyli $(x+1)(2x-1)(2x+1)=0$.

Zatem $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje..1 p.

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu,

$(x+1)\left(4x^2-1\right)=0$ lub $(x+1)(2x-1)(2x+1)=0$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje..2 p.

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie (II sposób) „metoda dzielenia"

Stwierdzamy, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $4x^3+4x^2-x-1$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x+1$. Otrzymujemy iloraz $4x^2-1$. Zapisujemy równanie w postaci $(x+1)\left(4x^2-1\right)=0$. Stąd $(x+1)(2x-1)(2x+1)=0$, czyli $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{2}$ lub

$x=\frac{1}{2}$

albo

stwierdzamy, że liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $4x^3+4x^2-x-1$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x+\frac{1}{2}$. Otrzymujemy iloraz $4x^2+2x-2$. Zapisujemy równanie w postaci $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+2x-2\right)=0$.

Stąd $4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=0$, czyli $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$ lub $x=-1$,

albo

stwierdzamy, że liczba $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $4x^3+4x^2-x-1$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x-\frac{1}{2}$. Otrzymujemy iloraz $4x^2+6x+2$. Zapisujemy równanie w postaci $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+6x+2\right)=0$.

Stąd $4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=0$, czyli $x=\frac{1}{2}$ lub $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- podzieli wielomian $4x^3+4x^2-x-1$ przez dwumian $x+1$, otrzyma iloraz $4x^2-1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- podzieli wielomian $4x^3+4x^2-x-1$ przez dwumian $x+\frac{1}{2}$, otrzyma iloraz $4x^2+2x-2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- podzieli wielomian $4x^3+4x^2-x-1$ przez dwumian $x-\frac{1}{2}$, otrzyma iloraz $4x^2+6x+2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

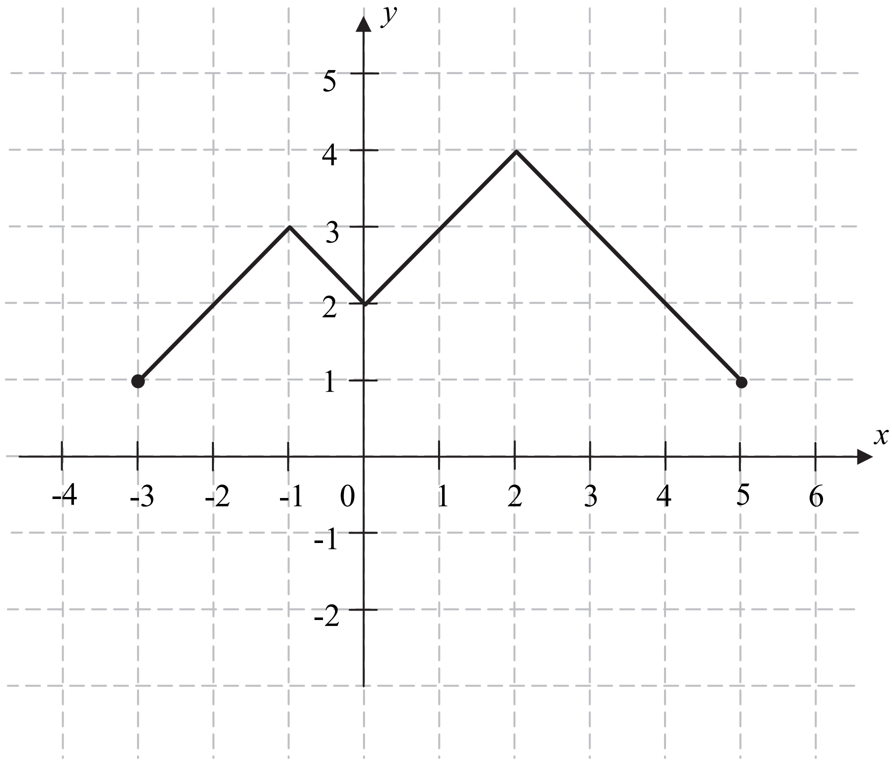
Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu zdający popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Funkcja h określona jest dla $x \in \langle -3, 5 \rangle$ wzorem $h(x) = f(x) + q$, gdzie q jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiemy, że jednym z miejsc zerowych funkcji h jest liczba $x_0 = -1$.

a) Wyznacz q.

b) Podaj wszystkie pozostałe miejsca zerowe funkcji h.

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak, szkicuje na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (4.b,d).

Rozwiązanie
a) Zauważamy, że wykres funkcji h otrzymamy z wykresu funkcji f przesuwając go o 3 jednostki w dół wzdłuż osi *Oy*. Wzór funkcji h ma zatem postać $h(x) = f(x) - 3$. Stąd $q = -3$.

b) Podajemy pozostałe miejsca zerowe funkcji h: $x = 1$, $x = 3$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje..1 p.
gdy:

- poda $q = -3$ i nie poda pozostałych miejsc zerowych funkcji h lub poda je błędnie

albo

- poda pozostałe miejsca zerowe funkcji h: 1, 3 oraz nie poda wartości q lub poda ją błędnie, np. $q = 3$.

Uwaga
Jeżeli zdający sporządzi poprawny wykres funkcji h oraz poda jedno z miejsc zerowych $x = 1$ lub $x = 3$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zdający trzymuje .... 2 p.
gdy poprawnie poda $q = -3$ oraz zapisze pozostałe miejsca zerowe funkcji h: 1, 3.

Uwaga
Jeżeli zdający poda współrzędne punktu $(1,0)$ lub $(3,0)$ zamiast miejsc zerowych, to nie przyznajemy punktu za miejsca zerowe.

Zadanie 30. (0–2)
Dany jest skończony ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 444, a ostatni jest równy 653. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego, jest o 11 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).

Rozwiązanie
Zauważamy, że ciąg jest arytmetyczny.
Przyjmijmy oznaczenia: $a_1 = 444$, różnica ciągu $r = 11$. Wtedy $a_n = 653$. Zapisujemy równanie $444 + (n-1)\cdot 11 = 653$, a stąd $n = 20$.
Obliczamy zatem S_{20}:

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{444+653}{2}\cdot 20 = 1097\cdot 10 = 10970.$$

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- poprawnie poda liczbę wyrazów danego ciągu ($n = 20$) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd podczas obliczania liczby składników tej sumy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę wyrazów tego ciągu.

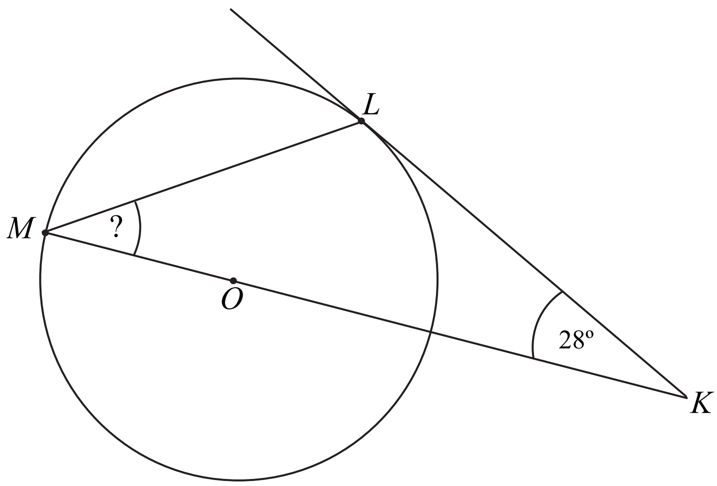
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 10970.

Uwaga
Jeżeli zdający wypisze wszystkie wyrazy danego ciągu i nie poda ich sumy lub tę sumę poda błędnie, to otrzymuje **1 punkt**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

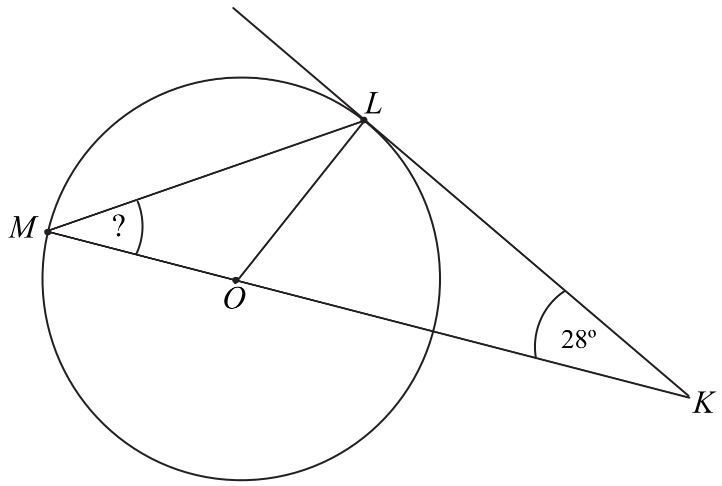
Jeżeli zdający wypisze poprawnie wszystkie wyrazy danego ciągu i przy zapisaniu sumy pominie jeden ze składników lub przepisze go błędnie i konsekwentnie obliczy tę sumę, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)
Dany jest okrąg o środku w punkcie *O*. Prosta KL jest styczna do tego okręgu w punkcie *L*, a środek *O* tego okręgu leży na odcinku *KM* (zobacz rysunek). Udowodnij, że kąt *KML* ma miarę 31°.



V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).

I sposób rozwiązania
Rysujemy odcinek *OL*.



Kąt *OLK* jest prosty. Zatem $|\sphericalangle KOL| = 62°$.

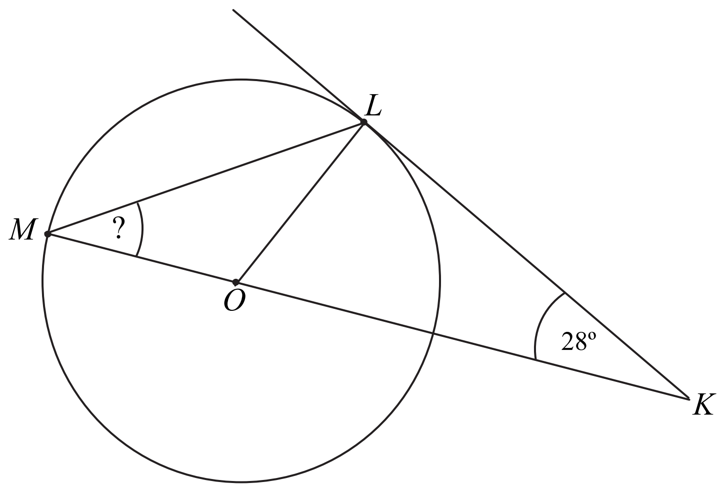
Czyli $|\sphericalangle MOL| = 118°$.

Zatem $|\sphericalangle OML| + |\sphericalangle MLO| = 62°$.

Kąty *OML* i *MLO* są równe, bo są kątami równymi w trójkącie równoramiennym.
Zatem $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle OML| = 31°$.

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania
Rysujemy odcinek *OL*.



Kąty *OML* i *MLO* są równe, bo są kątami równymi w trójkącie równoramiennym.
Kąt *OLK* jest prosty. Suma miar kątów trójkąta *KLM* jest równa $180°$.

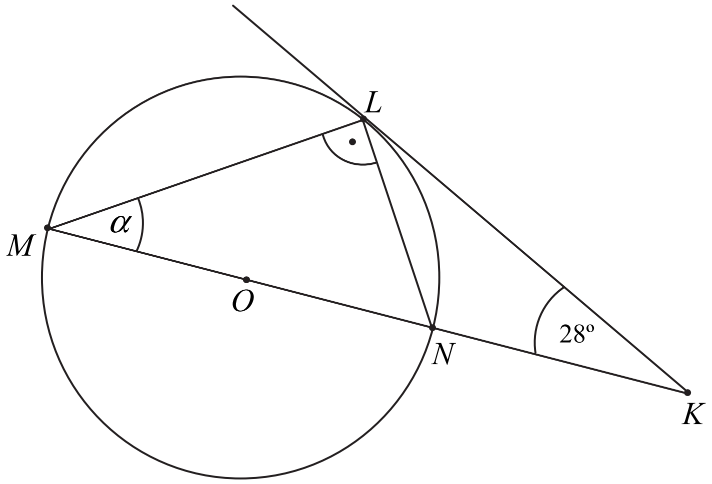
Zatem $2|\sphericalangle KML| + 90° + 28° = 180°$. Stąd $2|\sphericalangle KML| = 62°$.

Zatem $|\sphericalangle KML| = 31°$.

To kończy dowód.

III sposób rozwiązania

Rysujemy cięciwę *LN*, gdzie *N* jest końcem średnicy *MN* (zobacz rysunek). Niech $|\sphericalangle KML| = \alpha$.



Kąt *MLN* jest kątem wpisanym opartym na średnicy *MN*, więc jest prosty. Kąt między styczną do okręgu w punkcie *L* i cięciwą wychodzącą z punktu *L* jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, zatem $|\sphericalangle KLN| = |\sphericalangle KML| = \alpha$.

Zapisujemy równanie wynikające z bilansu kątów w trójkącie *KLM*:

$\alpha + 90° + \alpha + 28° = 180°$, stąd $\alpha = |\sphericalangle KML| = 31°$.

To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..1 p.

jeżeli:

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt *KLO* jest kątem prostym i $|\sphericalangle LOK| = 2 \cdot |\sphericalangle LMO|$,

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt *KLO* jest kątem prostym i $|\sphericalangle LOK| = 90° - |\sphericalangle LKO|$,

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt *KLO* jest kątem prostym i $|\sphericalangle LMO| = |\sphericalangle MLO|$,

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt *MLN* jest kątem prostym i $|\sphericalangle NLK| = |\sphericalangle LMN|$,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

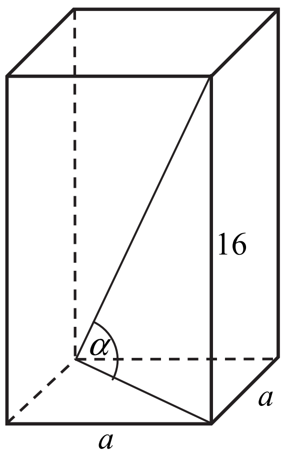
Zdający otrzymuje..2 p.

jeżeli przeprowadzi pełne poprawne rozumowanie.

Zadania 32. (0–4)
Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

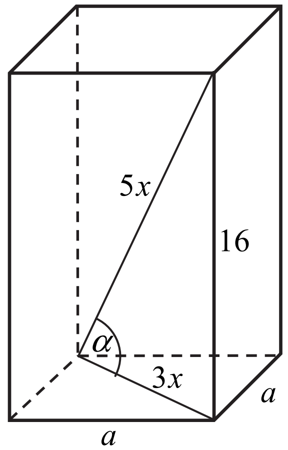
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).

I sposób rozwiązania
Niech a oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa i niech α będzie kątem nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy (zobacz rysunek).



Ponieważ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, więc kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Stąd wynika, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.
Z drugiej strony $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{a\sqrt{2}}$. Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa. Rozwiązujemy równanie:
$\frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$, skąd $a = 6\sqrt{2}$.
Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:
$P_c = 2\cdot\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48\left(3+8\sqrt{2}\right)$.

II sposób rozwiązania
Niech a oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, α – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy oraz niech przekątna podstawy graniastosłupa ma długość $3x$, a przekątna graniastosłupa $5x$ (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$(3x)^2+16^2=(5x)^2$,

$9x^2+256=25x^2$,

$256=16x^2$,

$16=x^2$.

Stąd $x=4$. Zatem przekątna podstawy graniastosłupa ma długość $3x=3\cdot 4=12$.
Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:

$a\sqrt{2}=12$, skąd $a=6\sqrt{2}$.

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$P_c=2\cdot\left(6\sqrt{2}\right)^2+4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 16=144+384\sqrt{2}=48\left(3+8\sqrt{2}\right)$.

Uwaga

Możemy również zauważyć, że trójkąt prostokątny i kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ jest podobny do trójkąta pitagorejskiego o bokach długości 3, 4 i 5. Skala tego podobieństwa jest równa $x=\frac{16}{4}=4$. W rezultacie szukane pole P_c powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe x^2P_m, gdzie P_m to pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego przekątna ma długość 5, a przekątna podstawy długość 3. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, więc $P_m=2\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot 4=9+24\sqrt{2}$.

Zatem $P_c=4^2\cdot P_m=16\left(9+24\sqrt{2}\right)=48\left(3+8\sqrt{2}\right)$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający:

- zapisze, że $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć skalę x podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta α, np. $(3x)^2+16^2=(5x)^2$

albo

- poda skalę x podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta α, $x=4$

albo
- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy

albo
- zapisze, że długość d przekątnej graniastosłupa jest równa 20

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający:
- obliczy długość e przekątnej podstawy tego graniastosłupa $e=12$

albo
- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np. $16^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{5a\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$16^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=20^2$ lub $\frac{16}{a\sqrt{2}}=\frac{4}{3}$

albo
- zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.

$$\begin{cases}\frac{a\sqrt{2}}{d}=\frac{3}{5}\\ \left(a\sqrt{2}\right)^2+16^2=d^2\end{cases}$$

gdzie d oznacza długość przekątnej tego graniastosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a=6\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa: $P_c=48\left(3+8\sqrt{2}\right)$.

Uwagi
1. Akceptujemy sytuację, w której zdający wprowadza do rozwiązania poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.
2. Jeżeli zdający przyjmie miarę kąta nachylenia, która nie wynika z treści zadania (np. $\alpha=30°$), i w rozwiązaniu z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający błędnie zaznaczy na rysunku podany kąt i korzysta z tego kąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający zapisze, że $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i korzysta z tej równości, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

5. Jeżeli zdający zapisze błędnie, że $e = a\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zadania 33. (0–4)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

I sposób rozwiązania

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet ulgowy,

B – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet normalny,

C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego z wymienionych biletów.

Ankietę przeprowadzono wśród 115 osób, zatem $|\Omega| = 115$.

Ponieważ wśród badanych występują osoby, które kupiły bilety obu rodzajów, więc $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

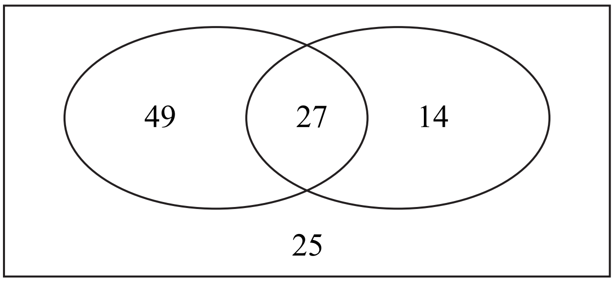
Stąd $|A \cup B| = 76 + 41 - 27 = 90$.

Zatem $|C| = |\Omega| - |A \cup B| = 25$, więc

$$P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe $\frac{5}{23}$.

II sposób rozwiązania
Oznaczmy:
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego biletu.



Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 115$.

Liczba wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet jest równa
$49 + 27 + 14 = 90$.

Zatem $|C| = 115 - 90 = 25$.

Stąd $P(C) = \dfrac{25}{115} = \dfrac{5}{23}$.

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe $\dfrac{5}{23}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.. 1 p.
Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 115$

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe: 49

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne: 14

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet: 90.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.. 2 p.
Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe: $|\Omega| = 115$, 49

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne: $|\Omega| = 115$, 14

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet: $|\Omega| = 115$, 90

albo

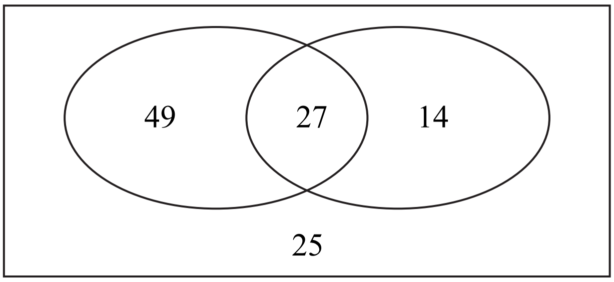
- obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: 25.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**
Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: $|\Omega| = 115$, 25.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie kupiła żadnego biletu i zapisze je w postaci ułamka nieskracalnego: $\frac{5}{23}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(C) > 1$ lub $P(C) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda tylko wynik końcowy $P(C) = \frac{5}{23}$ lub $P(C) = \frac{25}{115}$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający obliczy $P(C) = \frac{25}{115}$ i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu $|A \cup B|$ lub $|C|$, i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający sporządził diagram, na którym zapisał liczby 49, 27, 14 i 25,



i na tym zakończył, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 34. (0–5)
Biegacz narciarski Borys wyruszył na trasę biegu o 10 minut później niż inny zawodnik, Adam. Metę zawodów, po przebyciu 15-kilometrowej trasy biegu, obaj zawodnicy pokonali równocześnie. Okazało się, że wartość średniej prędkości na całej trasie w przypadku Borysa była o 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa niż w przypadku Adama. Oblicz, w jakim czasie Adam pokonał całą trasę biegu.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (3.b).

Rozwiązanie (I sposób)
Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu, a t czas, wyrażony w godzinach, w jakim Adam pokonał całą trasę biegu. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci
$v \cdot t = 15$.
Średnia prędkość, z jaką Borys pokonał całą trasę bieg, jest zatem równa $v + 4,5$, natomiast czas, w jakim Borys pokonał całą trasę biegu, jest równy $t - \frac{1}{6}$. Możemy więc zapisać drugie równanie
$$\left(v + 4,5\right) \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 15.$$
Stąd otrzymujemy
$$v \cdot t - \frac{1}{6}v + 4,5t - \frac{3}{4} = 15.$$
Po podstawieniu $v \cdot t = 15$ otrzymujemy
$$54t = 2v + 9,$$
$$t = \frac{2v+9}{54}.$$
Podstawiając $t = \frac{2v+9}{54}$ w równaniu $v \cdot t = 15$, otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą v
$$v \cdot \frac{2v+9}{54} = 15,$$
$$2v^2 + 9v - 15 \cdot 54 = 0,$$
$$2v^2 + 9v - 810 = 0,$$
$$\Delta = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 810 = 81 + 8 \cdot 810 = 81 \cdot 81, \ \sqrt{\Delta} = 81$$
$$v_1 = \frac{-9-81}{2 \cdot 2} < 0, \ v_2 = \frac{-9+81}{2 \cdot 2} = \frac{72}{4} = 18.$$
Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość biegacza byłaby ujemna, co jest niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania. Wówczas
$$t = \frac{2v+9}{54} = \frac{5}{6}.$$
Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

Rozwiązanie (II sposób)

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu. Wówczas czas t, w jakim pokonał całą trasę biegu, wyrażony w godzinach, jest równy $t=\frac{15}{v}$.

Czas potrzebny na pokonanie trasy biegu w przypadku Borysa był o $\frac{1}{6}$h krótszy, ale w tym drugim przypadku prędkość była większa o 4,5 km/h. Zatem możemy to opisać równaniem $t-\frac{1}{6}=\frac{15}{v+4,5}$.

Po podstawieniu $t=\frac{15}{v}$ otrzymujemy równanie z niewiadomą v: $\frac{15}{v}-\frac{1}{6}=\frac{15}{v+4,5}$.

$15\cdot 6\left(v+4,5\right)-v\left(v+4,5\right)=15\cdot 6v$,

$-v^2-4,5v+405=0$,

$-2v^2-9v+810=0$,

$2v^2+9v-810=0$.

$\Delta=81+4\cdot 2\cdot 810=81+8\cdot 810=81\cdot 81$, $\sqrt{\Delta}=81$

$v_1=\frac{-9-81}{2\cdot 2}<0$, $v_2=\frac{-9+81}{2\cdot 2}=\frac{72}{4}=18$.

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość biegacza byłaby ujemna, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania. Wówczas $t=\frac{2v+9}{54}=\frac{5}{6}$.

Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

Rozwiązanie (III sposób)

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu, t czas, wyrażony w godzinach, w jakim Adam pokonał całą trasę biegu. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$v\cdot t=15$.

Średnia prędkość, z jaką Borys pokonał całą trasę bieg, jest zatem równa $v+4,5$, natomiast czas, w jakim Borys pokonał całą trasę biegu, jest równy $t-\frac{1}{6}$. Możemy więc zapisać drugie równanie

$\left(v+4,5\right)\cdot\left(t-\frac{1}{6}\right)=15$.

Stąd otrzymujemy

$v\cdot t-\frac{1}{6}v+4,5t-\frac{3}{4}=15$.

Po podstawieniu $v\cdot t=15$ otrzymujemy

$54t=2v+9$,

$v=27t-4,5$.

Podstawiamy $v=27t-4,5$ w równaniu $v\cdot t=15$ i otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą v

$\left(27t-4,5\right)t=15$,

$27t^2-4,5t-15=0$,

$18t^2 - 3t - 10 = 0$,

$\Delta = 9 + 40 \cdot 18 = 729$, $\sqrt{\Delta} = 27$

$t_1 = \frac{3-27}{36} < 0$, $t_2 = \frac{3+27}{36} = \frac{5}{6}$.

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy czas biegu byłby ujemny, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający oznaczy prędkość średnią biegu Adama, wyrażoną w km/h, oraz czas, wyrażony w godzinach

w jakim Adam pokonał trasę i zapisze zależność między średnią prędkością biegu Borysa i czasem, w jakim Borys pokonał trasę, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam,

t – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$(v+4,5)\cdot\left(t-\frac{1}{6}\right)=15 \text{ albo } t-\frac{1}{6}=\frac{15}{v+4,5}$$

Uwaga

Zdający nie otrzymuje punktu, jeśli zapisze jedynie $v \cdot t = 15$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi v, t – odpowiednio prędkość i czas biegu Adama, np.;

$$\begin{cases}(v+4,5)\cdot\left(t-\frac{1}{6}\right)=15 \\ v\cdot t=15\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}t-\frac{1}{6}=\frac{15}{v+4,5} \\ v\cdot t=15\end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.; gdy v – prędkość pokonania trasy biegu przez Adama,

$$v\cdot\frac{2v+9}{54}=15 \quad \text{lub} \quad \frac{15}{v}-\frac{1}{6}=\frac{15}{v+4,5} \quad \text{lub} \quad (27t-4,5)t=15$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. v jako średnią prędkością biegu Adama i nie obliczy czasu biegu Adama

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą t (czas biegu Adama) z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy czas biegu Adama: 50 minut.

Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązania, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozwiązania i stosuje je konsekwentnie.
3. Zdający może stosować inne jednostki prędkości niż km/h.
4. Jeżeli zdający oznaczy prędkość Adama przez v (w km/h), przez t czas biegu Adama, a potem zapisze, że prędkość Borysa jest równa $v-4,5$ i czas jego biegu jest równy $t+\frac{1}{6}$, a następnie zapisze układ równań $v\cdot t=15$ i $(v-4,5)\cdot\left(t+\frac{1}{6}\right)=15$ i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca, konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (zdający otrzyma wtedy odpowiedź $t=40$ minut – czas biegu Adama).

<u>**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**</u>

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam, t – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$v+4,5=\frac{15}{t-\frac{1}{6}}$$

$$\begin{cases}15=v\cdot t\\ 15=(v+4,5)t-\frac{1}{6}\end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t-\frac{1}{6}$ w nawias. Zapis równania $v+4,5=\frac{15}{t-\frac{1}{6}}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam, t – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$v+4,5=\frac{15}{t-\frac{1}{6}} \quad \begin{cases} v=\frac{15}{t} \\ v+4,5=\frac{15}{t-\frac{1}{6}} \end{cases} \quad \frac{51}{t}+4,5=\frac{15}{t-}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{51}{t}+4,5=\frac{15}{t-}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 15 i pominął liczbę $\frac{1}{6}$ w mianowniku ułamka.

Przykład 3.

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $2v^2-9v-810=0$ zamiast równania $2v^2-9v+810=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realną prędkością, z jaką biegł Adam, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.