

**Egzamin maturalny
maj 2009**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**KLUCZ PUNKTOWANIA
ODPOWIEDZI**

Zadanie 1.

a)

Korzystanie z informacji	Wyznaczanie wartości funkcji dla danych argumentów i jej miejsca zerowego.	0–2
--------------------------	----------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli bezbłędnie uzupełni tabelę.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zapisze tylko wartości funkcji dla argumentów (-3) oraz 3 albo wyznaczy tylko miejsce zerowe funkcji.

Poprawna odpowiedź:

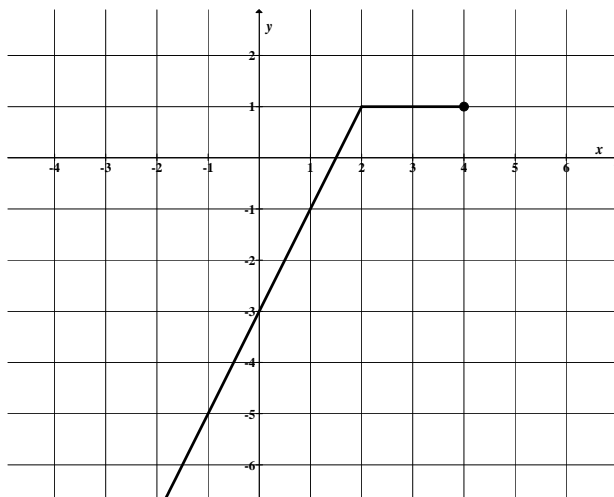
x	-3	3	$1,5$
$f(x)$	-9	1	0

b)

Korzystanie z informacji	Rysowanie wykresu funkcji.	0–1
--------------------------	----------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli bezbłędnie narysuje wykres funkcji f .

Poprawna odpowiedź:



c)

Korzystanie z informacji	Odczytywanie własności funkcji liniowej.	0–1
--------------------------	------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże nierówność $f(x) \geq -6$.

Poprawna odpowiedź: $x \geq -\frac{3}{2}$.

Wiadomości i rozumienie	Wyznaczanie liczb całkowitych należących do danego przedziału liczbowego.	0–1
-------------------------	---------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wypisze wszystkie całkowite argumenty funkcji f spełniające nierówność $f(x) \geq -6$.

Poprawna odpowiedź: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Zadanie 2.

Tworzenie informacji	Podawanie opisu matematycznego sytuacji przedstawionej w zadaniu w postaci układu równań.	0–2
----------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze układ równań opisujący warunki zadania, np.

$$\begin{cases} m+n=140 \\ m+15n=980 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze jedno z równań, które opisuje warunki zadania, np. $7(m+n)=980$ albo $m+15n=980$ albo $6m=8n$.

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie układu równań liniowych.	0–1
--------------------------	----------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże układ równań i poda liczby detali do wykonania przez każdego z rzemieślników.

Poprawna odpowiedź: $m=80$ i $n=60$.

Zadanie 3.

a)

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej zapisanej na podstawie tekstu zadania.	0–2
--------------------------	------------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli przekształci nierówność $f(x)+5 < 3x$ do postaci nierówności kwadratowej, np. $-2x^2 - 3x + 5 < 0$ i rozwiąże ją.

Poprawna odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli przekształci nierówność $f(x)+5 < 3x$ do postaci nierówności kwadratowej i na tym poprzestanie lub popełni błędy w rozwiązaniu tej nierówności.

b)

Korzystanie z informacji	Podawanie zbioru wartości funkcji.	0–1
--------------------------	------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poda zbiór wartości funkcji g .

Poprawna odpowiedź: $(-\infty, 8)$.

c)

Korzystanie z informacji	Przekształcanie wzoru funkcji do innej postaci.	0–2
--------------------------	-------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki b i c .

Poprawna odpowiedź: $b=12$, $c=-10$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie obliczy tylko jeden ze współczynników albo zapisze poprawnie warunki pozwalające na obliczenie współczynników b i c , ale popełni błąd przy obliczaniu tych współczynników.

Zadanie 4.

Korzystanie z informacji	Stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku naturalnym.	0–2
--------------------------	--------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli poprawnie zastosuje prawa działań na potęgach i zapisze równanie w postaci umożliwiającej obliczenie niewiadomej, np. $7x = 3^{54}(3^2 - 3 + 1)$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze liczby 243^{11} , 81^{14} , 9^{27} w postaci potęg liczby 3 i na tym poprzestanie lub w dalszej części rozwiązania popełni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Rozwiązanie równania liniowego.	0–1
-------------------------	---------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykaże, że liczba $x = 3^{54}$ jest rozwiązaniem równania, np.

$$7x = 3^{54}(3^2 - 3 + 1) \text{ stąd } 7x = 3^{54} \cdot 7, \text{ więc } x = 3^{54}.$$

Zadanie 5.

a)

Tworzenie informacji	Zapisywanie warunków wynikających z równości wielomianów.	0–1
----------------------	-----------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wszystkie zależności wynikające z równości wielomianów $2a + 3 = a$ i $a + b + c = -4$, i $b = -1$.

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie układu równań liniowych.	0–2
--------------------------	----------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki a i c .

Poprawna odpowiedź: $a = -3$ i $c = 0$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy poprawnie tylko jeden ze współczynników.

b)

Korzystanie z informacji	Rozkładanie wielomianu na czynniki.	0–2
--------------------------	-------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli rozłoży wielomian na czynniki liniowe.

Poprawna odpowiedź: $W(x) = x(x + 4)(x - 1)$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wielomian w postaci iloczynu wielomianów, z których jeden jest stopnia drugiego $W(x) = x(x^2 + 3x - 4)$ lub $W(x) = (x - 1)(x^2 + 4x)$, lub $W(x) = (x + 4)(x^2 - x)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zadanie 6.

a)

Korzystanie z informacji	Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych do rozwiązania problemu.	0–2
--------------------------	----------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli skorzysta z definicji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym i przekształci wyrażenie $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha$ do postaci $\frac{a(b-c)}{bc}$, gdzie a i b są odpowiednimi długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c jest długością przeciwprostokątnej.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym i zapisze: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ i na tym poprzestanie.

Tworzenie informacji	Uzasadnienie nierówności.	0–1
----------------------	---------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni nierówność $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha < 0$ powołując się, np. na znak różnicy $b - c < 0$.

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do przekształcania tożsamości trygonometrycznych.	0–2
--------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy wartość wyrażenia $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha$.

Poprawna odpowiedź: $\frac{1}{3}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli tylko obliczy wartość funkcji $\cos \alpha$ i na tym zakończy rozwiązanie.

Poprawna odpowiedź: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Zadanie 7.

a)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–2
--------------------------	---------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy różnicę r ciągu (a_n) oraz jego pierwszy wyraz.

Poprawna odpowiedź: $r = 2$, $a_1 = -11$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy tylko różnicę ciągu i na tym zakończy rozwiązanie lub w dalszych obliczeniach popełni błąd.

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–1
--------------------------	---------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy wyraz a_8 .

Poprawna odpowiedź: $a_8 = 3$.

Wiadomości i rozumienie	Sprawdzanie z definicji, czy dany ciąg jest geometryczny.	0–1
-------------------------	-----------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest ciągiem geometrycznym.

c)

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie definicji na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	0–1
-------------------------	-----------------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

Poprawna odpowiedź: $S_n = n^2 - 12n$, $n \geq 1$.

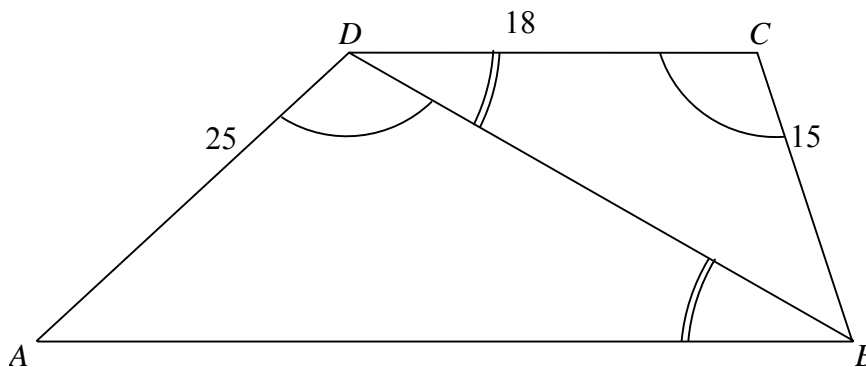
Korzystanie z informacji	Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej.	0–1
--------------------------	----------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy liczbę n , dla której S_n osiąga wartość najmniejszą.

Poprawna odpowiedź: $n = 6$.

Zadanie 8.

Tworzenie informacji	Dobieranie odpowiedniego algorytmu do rozwiązania zadania.	0–3
----------------------	------------------------------------------------------------	-----



Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli wykorzysta podobieństwo trójkątów ABD oraz BDC i obliczy długość przekątnej BD oraz podstawy AB .

Poprawna odpowiedź: $|BD| = 30$, $|AB| = 50$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy długość odcinka BD wykorzystując przy tym podobieństwo trójkątów ABD oraz BDC .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że trójkąty ABD i BDC są podobne i na tym zakończy rozwiązanie lub popełni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie związków miarowych w figurach płaskich.	0–1
-------------------------	----------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy obwód trapezu (pod warunkiem, że poprawnie obliczy długość podstawy AB).

Poprawna odpowiedź: 108.

Zadanie 9.

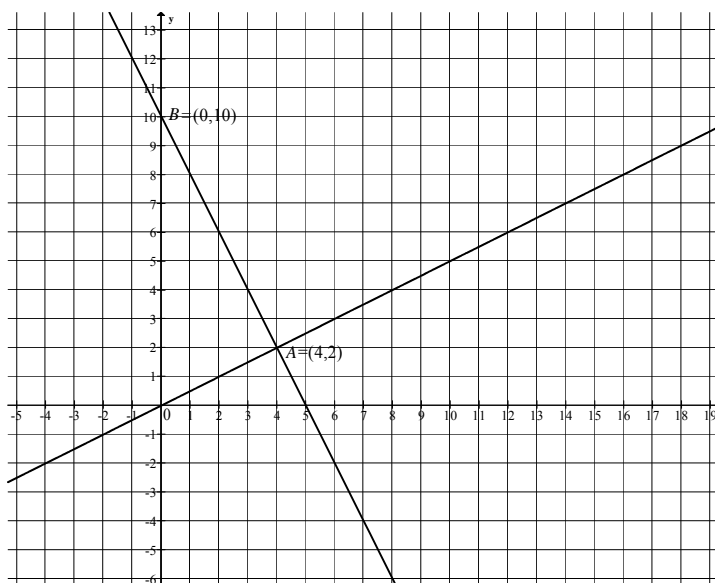
Korzystanie z informacji	Wyznaczenie równania prostej spełniającej warunki zadania.	0–2
--------------------------	------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze równanie prostej AB prostopadłej do prostej OA .

Poprawna odpowiedź: $y = -2x + 10$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy tylko współczynnik kierunkowy prostej AB i na tym poprzestanie.

Poprawna odpowiedź: (-2) .



Korzystanie z informacji	Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych.	0–1
--------------------------	------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy współrzędne punktu A .

Poprawna odpowiedź: $A = (4, 2)$.

Wiadomości i rozumienie	Wykorzystanie pojęcia odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej.	0–1
-------------------------	------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość przyprostokątnej OA .

Poprawna odpowiedź: $|OA| = 2\sqrt{5}$.

Zadanie 10.

a)

Korzystanie z informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej.	0–2
--------------------------	------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy średnią liczbę błędów i zapisze wynik w zaokrągleniu do całości.

Poprawna odpowiedź: $\bar{x} = \frac{57}{30} = 1,9 \approx 2$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zastosuje wzór na średnią arytmetyczną i na tym poprzestanie lub popełni błąd w obliczaniu średniej, albo źle zaokrągli wynik.

b)

Korzystanie z informacji	Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń.	0–3
--------------------------	----------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i zapisze wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź: $P(A) = \frac{63}{145}$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy moc zbioru Ω i moc zbioru A w tym samym modelu i na tym poprzestanie lub popełni błąd w obliczeniach, albo nie poda prawdopodobieństwa w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź: $|\Omega| = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ i $|A| = 21 \cdot 9 = 189$ lub $|\Omega| = 30 \cdot 29$ i $|A| = 21 \cdot 9 \cdot 2$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie policzy moc zbioru Ω .

Zadanie 11.

a)

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków miarowych w bryłach z użyciem trygonometrii.	0–4
--------------------------	------------------------------------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 4 punkty, jeśli obliczy objętość walca.

Poprawna odpowiedź: $V = \frac{54\sqrt{3}}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca i promień jego podstawy i na tym zakończy lub popełni błąd w obliczaniu objętości walca.

Poprawna odpowiedź: $P_b = 36\sqrt{3}$, $r = \frac{3}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca albo wysokość walca i promień jego podstawy i nie kontynuuje rozwiązania.

Poprawna odpowiedź: $P_b = 36\sqrt{3}$ albo $h = 6\sqrt{3}$ i $r = \frac{3}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość jednego z boków prostokąta, który jest powierzchnią boczną walca: h lub $2\pi r$.

Poprawna odpowiedź: $h = 6\sqrt{3}$ lub $2\pi r = 6$.

Wiadomości i rozumienie	Szacowanie wartości liczbowej.	0–1
-------------------------	--------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że objętość walca jest mniejsza od $18\sqrt{3}$.

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w kluczu punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.