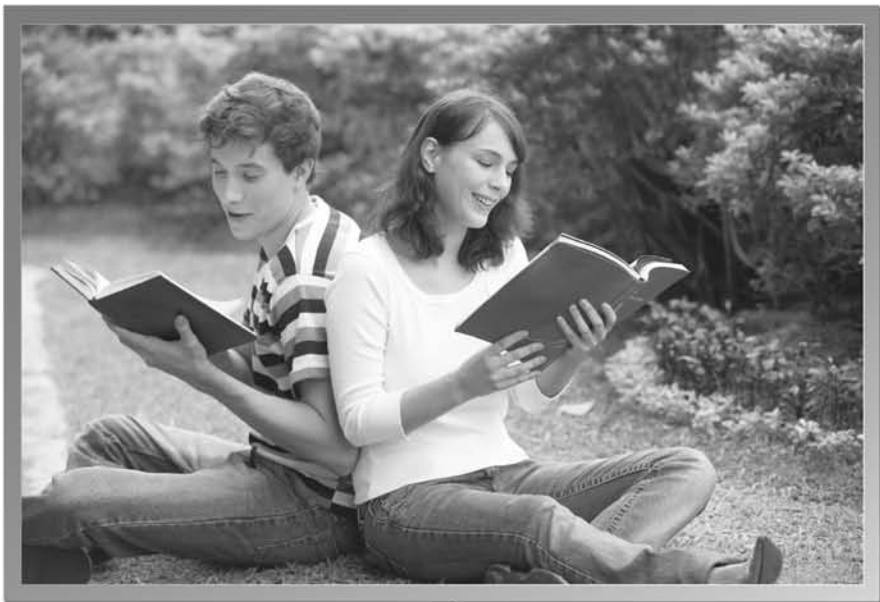
Osiągnięcia maturzystów w roku 2008

Komentarz do zadań z matematyki



Sprawozdanie z egzaminu maturalnego w maju 2008 roku

Opracowanie

Barbara Andrzejewska

Anna Zalewska

Współpraca

Henryk Dąbrowski

Witold Dziamski

Mieczysław Fałat

Piotr Ludwikowski

Edyta Marczewska

Marian Pacholak

Maria Pająk-Majewska

Agata Siwik

Konsultacja naukowa

dr Edward Stachowski

WSTĘP

Egzamin maturalny z matematyki odbył się w całym kraju 14 maja 2008 r. i miał formę pisemną. Maturzyści mogli wybrać matematykę jako przedmiot obowiązkowy lub dodatkowy.

Matematyka jako przedmiot **obowiązkowy** mogła być zdawana na poziomie podstawowym lub rozszerzonym, a jako przedmiot dodatkowy – na poziomie rozszerzonym.

Egzamin na poziomie **podstawowym** trwał 120 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych sprawdzających rozumienie pojęć i umiejętność ich zastosowania w życiu codziennym oraz zadań o charakterze problemowym. Zadania egzaminacyjne obejmowały zakres wymagań dla poziomu podstawowego.

Egzamin na poziomie **rozszerzonym** trwał 180 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych wymagających rozwiązania problemów matematycznych. Zadania egzaminacyjne obejmowały zakres wymagań dla poziomu rozszerzonego.

Warunkiem zdania egzaminu było uzyskanie co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia na poziomie podstawowym lub na poziomie rozszerzonym.

Zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot **dodatkowy**, zdawali egzamin na poziomie rozszerzonym, rozwiązując ten sam arkusz, co absolwenci zdający przedmiot obowiązkowy.

Na świadectwie wyniki egzaminu zarówno obowiązkowego, jak i dodatkowego zostały zapisane w skali procentowej.

OPIS ARKUSZY EGZAMINACYJNYCH

Zadania zawarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzały wiadomości i umiejętności określone w 3 obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

I. Wiadomości i rozumienie
II. Korzystanie z informacji
III. Tworzenie informacji.

Zadania zawarte w arkuszach egzaminacyjnych:

1) pozwalały wykazać się znajomością i rozumieniem podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz umiejętnością ich stosowania podczas rozwiązywania problemów matematycznych,
2) sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania tekstów matematycznych, sprawność rozwiązywania zadań, oraz przetwarzania informacji pochodzących z różnych źródeł, takich jak tabele, schematy, wykresy,
3) sprawdzały umiejętność analizowania i rozwiązywania problemów, argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego, podawania opisu matematycznego danej sytuacji, dobierania algorytmów do wskazanej sytuacji problemowej i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

Arkusze egzaminacyjne zostały opracowane dla dwóch poziomów wymagań – podstawowego i rozszerzonego.

Za prawidłowe rozwiązanie zadań z arkuszy dla obu poziomów zdający mógł otrzymać po 50 punktów. W arkuszu dla poziomu rozszerzonego 30% punktów możliwych do zdobycia stanowiły zadania oparte na wiadomościach i umiejętnościach określonych dla poziomu podstawowego.

Arkusze egzaminacyjne zostały opublikowane na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej www.cke.edu.pl .
Podczas egzaminu zdający mogli korzystać z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*, kalkulatora prostego, cyrkla oraz linijki.

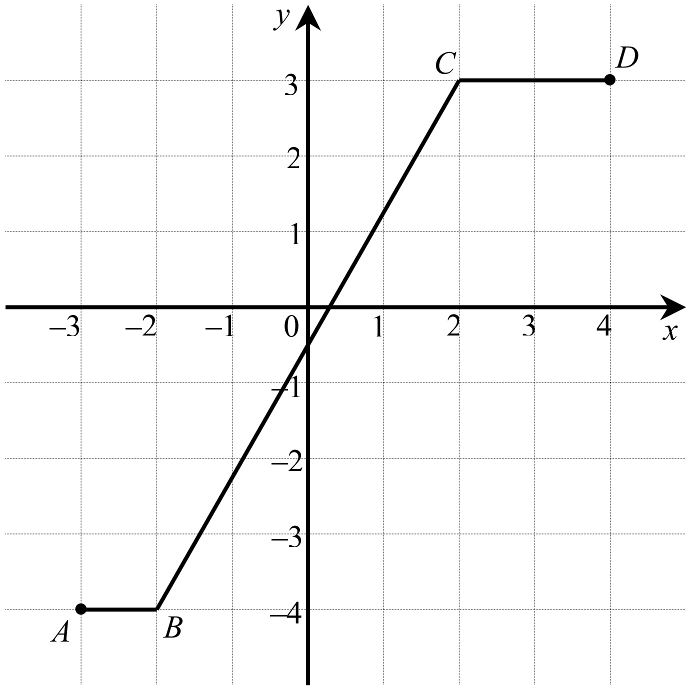
Arkusz egzaminacyjny dla poziomu podstawowego

Arkusz egzaminacyjny dla poziomu podstawowego zawierał 12 zadań otwartych. Zadania te badały przede wszystkim znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych oraz formułowania opisu matematycznego danej sytuacji.
Tematyka zadań egzaminacyjnych w tym arkuszu obejmowała większość treści z podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące funkcji i ich własności, ciągów, wielomianów, planimetrii i stereometrii z zastosowaniem trygonometrii, geometrii analitycznej oraz zadanie z tzw. kontekstem praktycznym.

Opis zadań egzaminacyjnych. Sprawdzane umiejętności, typowe odpowiedzi i uwagi do rozwiązań maturzystów.

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Na poniższym rysunku przedstawiono łamaną *ABCD*, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$.



Korzystając z tego wykresu:

a) zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f,

b) podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,

c) wyznacz równanie prostej BC,

d) oblicz długość odcinka BC.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności z II obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych: • odczytywania informacji ilościowych i jakościowych z wykresu funkcji – II.2)b). Ponadto zdający miał się wykazać umiejętnościami opisanymi w I obszarze standardów: • wyznaczania równania prostej – I.7)a), • obliczania długości odcinka – I.7)b).
Rozwiązywalność zadania 67%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający poprawnie odczytywali i zapisywali w postaci przedziału zbiór wartości funkcji. Odpowiadając na polecenie oznaczone literą b), przyjmowali różne strategie. Część zdających obliczała przybliżoną wartość argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$ i dla niej odczytywała z wykresu wartość funkcji, inni dokonywali oszacowania różnicy $1 - \sqrt{10}$, stwierdzali, że liczba ta należy do przedziału $\langle -3, -2 \rangle$ i podawali odpowiedź odczytaną z wykresu. Do wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez punkty B i C oraz długości odcinka BC zdający używali wzoru, który znajdowali w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych.*

Najczęściej powtarzające się błędy Błędem, który powtarzał się w wielu rozwiązaniach było złe zapisanie zbioru wartości funkcji. Część zdających pomyliła go ze zbiorem argumentów (co można chyba wytłumaczyć stresem egzaminacyjnym), a część zapisała go w postaci przedziału otwartego lub jednostronnie domkniętego, np. $W_f = \langle -3,4 \rangle$, $W_f \in \langle -3,4 \rangle$, $f(x) \in \langle -3,4 \rangle$, $W_f = \langle 3,-4 \rangle$, $W_f = (-4,3)$, $y = (-4,3)$, $y \in (-4,3)$, $f(x) = (-3,4)$, , $f(x) \in \{-3,4\}$, $x \in \langle -3,-2 \rangle \cup \langle -2,2 \rangle \cup \langle 2,4 \rangle$, $x \in R - \langle -3,4 \rangle$, $y \in \langle -3,3 \rangle$, $f(x) \in \langle -4,4 \rangle$. Odpowiadając na polecenie b) podstawiali wartość $1-\sqrt{10}$ do wyznaczonego w podpunkcie c) równania prostej BC. Pojawiały się często odpowiedzi, które świadczyły o zupełnym braku zrozumienia polecenia, np. $x = 1-\sqrt{10} = 1-3,2 = -2,2$ czyli $f\left(1-\sqrt{10}\right) = -2,2$ lub $x = 1-\sqrt{10}$ stąd $x+\sqrt{10} = 1$. Wyznaczając równanie prostej lub długość odcinka, zdający popełniali błędy nieuwagi, błędy rachunkowe i niestety również błędy rzeczowe, które nie pozwalały im na podanie poprawnej odpowiedzi.
Komentarz Zadania, w których zdający mieli się wykazać umiejętnością odczytywania informacji ilościowych i jakościowych z wykresu funkcji były obecne na każdym z dotychczasowych egzaminów maturalnych. Są to elementarne umiejętności niezbędne przy posługiwaniu się funkcjami liczbowymi, a na dodatek rozwiązanie ich nie jest związane z koniecznością prowadzenia jakichkolwiek obliczeń rachunkowych. Gdyby nie trudności, jakie miała część zdających z prawidłowym zapisaniem przedziału opisującego zbiór wartości funkcji, można by stwierdzić, że umiejętności te są dobrze opanowane. Innym problemem są błędy rachunkowe, które popełniali zdający, wyznaczając równanie prostej *BC* i długość odcinka *BC*. W przedstawionych rozwiązaniach maturzyści wykazali się znajomością algorytmu postępowania jednak nie potrafili go bezbłędnie zastosować. Otrzymane wyniki nie były przez nich weryfikowane. Zdający pozostawiali otrzymaną niepoprawną odpowiedź, nawet wtedy, gdy łatwo mogli się zorientować, że jest ona błędna, np. wyznaczony współczynnik kierunkowy prostej był liczbą ujemną, mimo że z rysunku można odczytać iż powinna to być liczba dodatnia.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest n boków i $n \geq 3$ wyraża się wzorem

$$P(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wykorzystując ten wzór:

a) oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.
b) oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.
c) sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie:
Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.
Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu była badana umiejętność z II obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych: • stosowania podanego wzoru do rozwiązania problemu matematycznego – II.1)a) oraz umiejętności opisane w III obszarze standardów:

- podania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci równania i wykorzystania go do rozwiązania problemu – III 1)a),
- uzasadniania wniosków na podstawie podanego wzoru – III.2)b).

Rozwiązywalność zadania
58%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Po podstawieniu do wzoru liczby 20 i wykonaniu obliczeń zdający otrzymywali liczbę przekątnych w dwudziestokącie. W drugiej części zadania zapisywali równanie $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=5n$ i po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymywali rozwiązanie $n=13$. Odpowiadając na ostatnie pytanie, maturzyści podawali przykład wielokąta, który nie spełnia warunków podanego stwierdzenia, np. sześciokąt wypukły ma dziewięć przekątnych i wnioskowali, że stwierdzenie przedstawione w zadaniu nie jest prawdziwe.

Najczęściej powtarzające się błędy
W pierwszej części zadania zdający prawie bezbłędnie wyznaczali liczbę przekątnych dwudziestokąta, choć zdarzały się błędy rachunkowe typu: $P(20)=\frac{20\cdot(20-3)}{2}=340$.
Wiele błędów pojawiało się w następnym etapie rozwiązania zadania, tam gdzie trzeba było się wykazać umiejętnością zapisania warunków zadania za pomocą równania. Zdający mieli trudności z zapisaniem zależności „liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków", używając podanego w treści zadania wzoru na liczbę przekątnych w wielokącie wypukłym. Martwi fakt, że wielu zdających, którzy poprawnie ułożyli równanie kwadratowe nie potrafiło potem go rozwiązać.
Najwięcej błędów popełniali zdający w podpunkcie c). Rozwiązując zadanie, stosowali podany wzór i obliczali liczbę przekątnych w niektórych wielokątach. Mieli poczucie, że tezę należy sprawdzić na 3 przykładach i na tej podstawie formułować odpowiedź. Pojawiały się zatem obliczenia, np. $P(4)=2$, $P(8)=20$ i $P(12)=54$, na podstawie których sformułowana była odpowiedź „podane stwierdzenie jest prawdziwe".
Warto zauważyć, że wśród poprawnych odpowiedzi nierzadkie były takie sekwencje sprawdzeń, w których mimo znalezienia kontrprzykładu było wykonywane jeszcze jedno, to „trzecie", np. $P(4)=2$, $P(10)=35$, $P(14)=77$.

Komentarz
Zdający mieli trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego czyli zapisania równania, do przedstawionej sytuacji problemowej. Stąd duża liczba prac, w których maturzyści zakończyli rozwiązywanie na wprowadzeniu oznaczeń, nie zawsze zgodnych z warunkami zadania lub nieudanych próbach zapisania zależności między liczbą przekątnych wielokąta i liczbą jego boków. Wynika stąd, że maturzyści mają problem z porównywaniem ilorazowym – umiejętnością, którą powinni opanować na wcześniejszych etapach kształcenia.
Ogromnym problemem było uzasadnienie wniosku do polecenia c). Zdający nie radzili sobie z doborem strategii rozwiązania zadania. Zadania tego typu wymagają od maturzystów dojrzałości myślenia matematycznego i umiejętności doboru argumentów dla potwierdzenia, bądź odrzucenia sformułowanej w zadaniu tezy.
Zastosowanie wiadomości i umiejętności matematycznych w zadaniach, w których nie można wykorzystać gotowych algorytmów stanowi, jak widać, problem dla wielu zdających.

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $4^{23}x-32^{9}x=16^{4}\cdot\left(4^{4}\right)^{4}$.

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^{k}, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane następujące umiejętności z II obszaru standardów egzaminacyjnych:

- posługiwania się twierdzeniami dotyczącymi działań na potęgach – II.2)a),
- rozwiązywania równań liniowych – II.2)a).

Rozwiązywalność zadania

53%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający zapisywali podane w równaniu współczynniki liczbowe jako potęgi liczby 2 i wykonywali działania na potęgach o równych podstawach. Doprowadzali równanie do postaci, np. $2^{46}x-2^{45}x=2^{48}$, następnie rozwiązywali, wybranymi przez siebie sposobami, równanie liniowe wyłączając przed nawias wspólny czynnik, np. $2^{45}\left(2x-x\right)=2^{48}$ i wyznaczali wartość niewiadomej x zapisując ją w żądanej postaci: $x=2^{3}$.

Najczęściej powtarzające się błędy

W rozwiązaniach zadania zdający popełniali wiele błędów rachunkowych oraz błędów wynikających z nieznajomości praw działań na potęgach. Maturzyści wykazywali się nieznajomością praw działań na potęgach, pisząc np. $\left(4^{4}\right)^{4}=4^{8}$, często pojawiały się błędy rachunkowe w obliczeniach, np. $32^{9}=2^{5\cdot 9}=2^{35}$. Zamiast zapisów poprawnych zdający formułowali sporo fałszywych równości, takich jak: $4^{23}=16^{22}$, $\left(2^{2}\right)^{23}=2^{25}$, $32^{9}=2^{13}$, $32^{9}=1024^{8}$, $16^{4}=2^{8}$, $\left(4^{4}\right)^{4}=2^{10}$, $\left(4^{4}\right)^{4}=2^{18}$, $\left(4^{4}\right)^{4}=2^{20}$, $16^{4}\cdot 4^{16}=64^{20}$, $32^{9}=2\cdot\left(16^{9}\right)$, $2^{16}\cdot 2^{32}=2^{512}$, $4^{24}:2=2^{24}$. Niestety znajomość elementarnych praw działań na potęgach jest niewystarczająca.

Druga faza rozwiązania równania – wyznaczenie niewiadomej i zapisanie jej w żądanej postaci również sprawiła kłopoty wielu zdającym. Podstawową trudnością było uświadomienie sobie, że jest to równanie liniowe, zatem, jeżeli nie można łatwo przeprowadzić redukcji wyrazów podobnych, to pozostaje wyłączenie wspólnego czynnika poza nawias albo podzielenie obu stron równania przez 2^{45}. Maturzyści, którzy doprowadzili równanie do postaci $2^{46}x-2^{45}x=2^{48}$, w wielu przypadkach, nie potrafili bezbłędnie wyznaczyć różnicy $2^{46}x-2^{45}x$. Wielu zdających próbowało szybko przebrnąć przez ten etap pisząc, że $2^{46}x-2^{45}x=2x$, $2^{46}x-2^{144}x=-2^{98}x$, $2^{43}x-2^{45}x=2^{-2}x$, $2^{25}x-2^{14}x=2^{11}x$, skąd do odpowiedzi końcowej był już tylko jeden krok.

Komentarz

Maturzysta w zadaniu miał się wykazać opanowaniem dwóch podstawowych umiejętności: działaniem na potęgach i rozwiązywaniem równań liniowych. Tylko bardzo precyzyjne, bezbłędne wykonanie działań na potęgach doprowadzało zdającego do prostego równania liniowego i w konsekwencji do poprawnej odpowiedzi. Strategia rozwiązywania zadania, a tym samym kolejność wykonywania działań w tym przypadku zależała tylko od pomysłowości, spostrzegawczości i umiejętności stosowania algorytmów.

Wydaje się, że zdającym zabrakło refleksji dotyczącej typu równania, które mają do rozwiązania. Stąd trudności w wyznaczaniu niewiadomej. Wyraźnie było widać, jak trudno było zdającym stosować naturalne wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane umiejętności z III obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych:

- podawania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci równania i wykorzystania go do rozwiązania problemu – III 1)a)

oraz umiejętności opisane w obszarze II.2)a):

- wykonywania obliczeń procentowych,
- rozwiązywania równań liniowych.

Rozwiązywalność zadania

63%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający oznaczali cenę początkową benzyny niewiadomą *x*, a następnie zapisywali cenę po pierwszej podwyżce w zależności od ceny pierwotnej, potem ustalali podobną zależność biorąc pod uwagę drugą podwyżkę. W rezultacie otrzymywali równanie liniowe z jedną niewiadomą $1{,}155 \cdot x = 4{,}62$, z którego wyznaczali cenę początkową $x = 4$.

Najczęściej powtarzające się błędy

Do najczęściej popełnianych błędów należy zaliczyć błędy rzeczowe związane z obliczaniem procentu z innej niż należy wielkości, oraz błędne stosowanie pojęcia procentu, np. często występują zapisy typu „$x + 10\%$”, przy czym 10% jest używane jak liczba 0,10, a nie jako dziesięć setnych wielkości *x*. Innym stosunkowo często występującym błędem było obliczanie obu podwyżek od tej samej wartości początkowej, co w efekcie prowadziło do błędnych równań typu: „$x + 10\%x + 5\%x = 4{,}62$”. W niektórych pracach zdający otrzymywali wynik zupełnie nierealny, np. cena przed podwyżkami była wyższa niż cena po podwyżkach. Mimo tego nie dokonali żadnego krytycznego osądu tego wyniku.

Komentarz

Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Zdający w przeważającej części nie mieli trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji problemowej.

Pojawiały się też rozwiązania algebraiczne, w których zdający umiejętnie odwracali kolejność operacji przez co pierwotną cenę jednego litra benzyny uzyskiwali w drodze dwóch operacji dzielenia ($4{,}62 : 1{,}05 = 4{,}4$ i $4{,}4 : 1{,}1 = 4$). Taka metoda rozwiązania występuje w pracach maturalnych rzadko. Prawdopodobnie nie jest to metoda często prezentowana na lekcjach matematyki, a szkoda. Umożliwiła ona pełne rozwiązanie zadania tym maturzystom, którzy mieli problemy z opisem treści zadania za pomocą równania.

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.

b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności z II obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych: • obliczania, ile wyrazów ciągu liczbowego określonego wzorem spełnia podany w zadaniu warunek, • wyznaczania ciągu arytmetycznego na podstawie wskazanych danych oraz obliczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym – standard I.5)a).
Rozwiązywalność zadania 55%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający zapisywali i rozwiązywali nierówność $2 - \frac{1}{n} < 1{,}975$. Na podstawie otrzymanego rozwiązania $n < 40$ formułowali odpowiedź do podpunktu a) zadania. Pewną odmianą tego sposobu było rozwiązywanie równania $2 - \frac{1}{n} = 1{,}975$ zamiast nierówności, a następnie odpowiednia interpretacja uzyskanego wyniku. W podpunkcie b) zdający korzystali z zależności między trzema kolejnymi wyrazami w ciągu arytmetycznym do zapisania równania $\frac{a_2 + x}{2} = a_7$, obliczali wartość liczbową drugiego i siódmego wyrazu ciągu (a_n) i rozwiązując równanie obliczali wartość wyrazu oznaczonego niewiadomą x.
Najczęściej powtarzające się błędy Po poprawnym rozwiązaniu nierówności $2 - \frac{1}{n} < 1{,}975$ zdający błędnie interpretowali otrzymany wynik, np. formułowali wniosek, podając liczbę 40 zamiast 39. Zdarzały się prace, z których można wywnioskować, że zdający nie rozumieli wzoru na n - ty wyraz ciągu (a_n). W podpunkcie b) przyjmowali, że $a_2 = 2$ i $a_7 = 7$.
Komentarz Zadanie składa się z dwóch podpunktów, z których każdy można rozwiązać niezależnie. Nieco łatwiejszy okazał się dla zdających podpunkt a) tego zadania. Pojawiały się rozwiązania, w których zdający mozolnie liczyli wyrazy ciągu od a_1 do a_{40} i na tej podstawie określali liczbę wyrazów ciągu spełniających warunki zadania. Następnie wyznaczali x jako sumę wyrazów a_7 i $a_7 - a_2$.

Zadanie 6. *(5 pkt)*

Prosta o równaniu $5x+4y-10=0$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punkcie A oraz oś Oy w punkcie B. Oblicz współrzędne wszystkich punktów C leżących na osi Ox i takich, że trójkąt ABC ma pole równe 35.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności z obszaru III standardów wymagań egzaminacyjnych: • podawania opisu matematycznego sytuacji opisanej w zadaniu w postaci równania – III.1)a), • analizowania i interpretowania otrzymanych wyników – III.2)a), oraz obliczania współrzędnych punktów leżących na danej prostej – standard I.3)a).
Rozwiązywalność zadania 44%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Rozwiązanie zadania w przeważającej części rozpoczynano od obliczenia współrzędnych punktów A i B przecięcia prostej o równaniu $5x+4y-10=0$ z osiami układu współrzędnych. Następnie przyjmując za wysokość trójkąta odcinek *OB*, zdający odczytywali jego długość równą $\frac{5}{2}$ i ze wzoru na pole trójkąta obliczali długość boku *AC*. Aby podać odpowiedź, musieli zinterpretować otrzymany wynik, czyli znaleźć współrzędne punktów leżących na osi Ox takich, że $\lvert AC\rvert=28$. W odpowiedzi podawali współrzędne dwóch punktów spełniających podane warunki. Był to najtrudniejszy krok rozwiązania zadania. Pojawiały się, choć rzadko, inne sposoby rozwiązania. Wśród nich najczęściej występował sposób rozwiązania wykorzystujący tę samą metodę co opisana powyżej, z tą różnicą, że za podstawę trójkąta *ABC* zdający przyjmowali odcinek *AB*. Sposób ten prowadził do trudniejszych rachunków i koniecznością rozwiązania równania z wartością bezwzględną, z czym zdający radzili sobie dużo słabiej.
Najczęściej powtarzające się błędy W ocenianych pracach występowały błędy rachunkowe pojawiające się w różnych miejscach rozwiązania, nierzadko przy przekształcaniu równania prostej *AB* z postaci ogólnej do postaci kierunkowej. Zdający niepoprawnie zaznaczali punkty *A* i *B* w układzie współrzędnych mimo bezbłędnego obliczenia ich współrzędnych (odciętej punktu *A*: $x_A=2$ i rzędnej punktu *B*: $y_B=\frac{5}{2}$). Część zdających nie widziała dwóch możliwych położeń punktu *C*, podając jedynie jedno z nich, najczęściej na lewo od punktu *A*.
Komentarz Przyczyny niepełnej interpretacji uzyskanych wyników przy ustalaniu możliwego położenia punktu *C* należy upatrywać w tym, że uczniowie rozwiązują bardzo mało zadań konstrukcyjnych z geometrii. Poza tym zadania z geometrii, w których obiekty geometryczne umieszczone zostały w układzie współrzędnych, są dla części zdających zupełnie niezwiązane z zadaniami, w których obiekty te ujmowane są syntetycznie.

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach $30°$ i $45°$. Oblicz wysokość tego trapezu.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się następującymi umiejętnościami: • wykorzystywania związków między bokami i kątami w trójkącie prostokątnym oraz stosowania funkcji trygonometrycznych do rozwiązania problemu – standard II.2)a), • podawania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci równania liniowego – standard III.1)a), • rozwiązywania równań liniowych – standard II.2)a).
Rozwiązywalność zadania 36%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający dokonywali podziału trapezu na prostokąt i dwa trójkąty, a następnie zapisywali zależności między przyprostokątnymi tych trójkątów, korzystając z funkcji trygonometrycznych podanych kątów. Otrzymane zależności wykorzystywali do ułożenia równania, w którym niewiadomą była wysokość trapezu: $h+4+h\sqrt{3}=10$. Końcowym etapem było rozwiązanie tego równania, w efekcie czego zdający otrzymywał szukaną wysokość trapezu.
Najczęściej powtarzające się błędy Pierwsze trudności w zadaniu pojawiały się już na etapie analizy warunków zadania i ułożenia równania z jedną niewiadomą. Ale najwięcej błędów zdający popełniali podczas przekształcania wyrażeń zawierających pierwiastki, np. w wyrażeniu $h=\frac{6}{\sqrt{3}+1}$, szczególnie podczas usuwania niewymierności z mianownika ułamka.
Komentarz Zadanie pokazało, że zdający nadal nie radzą sobie z prostymi problemami geometrycznymi, takimi jak znajdowanie zależności między bokami trójkąta prostokątnego. Do rozwiązania problemu maturzyści mogli wykorzystać funkcje trygonometryczne lub znane im z gimnazjum własności trójkątów prostokątnych będących „połową” kwadratu lub „połową” trójkąta równobocznego.

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$.

a) Sprawdź, czy punkt $A = (1, 30)$ należy do wykresu tego wielomianu.

b) Zapisz wielomian W w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane umiejętności opisane w I i II obszarze standardów wymagań egzaminacyjnych:

- sprawdzania, czy punkt leży na wykresie funkcji – I.2)a),
- rozkładania wielomianu na czynniki – II.2)a).

Rozwiązywalność zadania

74%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający obliczali wartość wielomianu W dla argumentu równego 1 i porównywali otrzymaną wartość z rzędną punktu A. Rozkładając wielomian W na czynniki, najczęściej stosowali metodę grupowania i wyłączania wspólnego czynnika poza nawias. Duża grupa zdających wykorzystywała twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu do wyznaczenia pierwiastka wielomianu W, a następnie wykonywała dzielenie wielomianu W przez dwumian. Po znalezieniu pierwiastków, otrzymanego w wyniku dzielenia, trójmianu kwadratowego, zdający przedstawiali wielomian W w postaci iloczynowej.

Najczęściej powtarzające się błędy

W pierwszej części zadania najczęstszą przyczyną niepoprawnych rozwiązań były błędy rachunkowe. Zdarzało się jednak, że zdający, pomimo poprawnie wykonanych obliczeń, nie sformułowali właściwego wniosku lub przedstawiony wniosek był błędny.

W drugiej części zadania wielu zdających popełniało błędy w trakcie grupowania wyrazów, co w konsekwencji uniemożliwiało im dalsze poprawne rozwiązanie, np.

$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = x^2(x-5) - 9(x+5) = (x^2-9)(x-5)(x+5)$.

Komentarz

Zdający, podobnie jak w latach ubiegłych, dobrze opanowali umiejętność rozkładania wielomianu na czynniki liniowe. Rozwiązania zadania, szczególnie w drugiej jego części charakteryzowały się dużą różnorodnością stosowanych metod. Większość zdających wybrała najprostszą i najbardziej efektywną metodę grupowania i wyłączania wspólnego czynnika poza nawias, inni wybierali bardziej pracochłonną metodę dzielenia wielomianu W przez dwumian, stosując algorytm pisemnego dzielenia lub schemat Hornera.

Zadanie 9. *(5 pkt)*

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=(2x+1)(x-2)$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w obszarze II.2)a) standardów wymagań egzaminacyjnych: • wykorzystywania własności funkcji kwadratowej do wyznaczenia najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
Rozwiązywalność zadania 57%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający obliczali odciętą wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji *f*, wykorzystując w tym celu średnią arytmetyczną miejsc zerowych lub postać ogólną funkcji. Stwierdzali, że obliczona liczba należy do przedziału $\langle -2, 2\rangle$, obliczali wartość funkcji dla odciętej wierzchołka i zapisywali, że jest to najmniejsza wartość funkcji w tym przedziale. Następnie obliczali wartości funkcji na końcach przedziału i spośród nich wybierali wartość największą.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający najczęściej popełniali błędy na etapie analizy warunków zadania i planowania strategii postępowania. Nie sprawdzali, czy odcięta wierzchołka należy do przedziału $\langle -2, 2\rangle$ i w związku z tym nie uwzględniali w swoich rozważaniach wartości funkcji dla odciętej wierzchołka lub nie obliczali wartości funkcji na końcach przedziału. Częstym błędem było podstawianie we wzorze na rzędną wierzchołka paraboli wartości $\sqrt{\Delta}$ zamiast Δ.
Komentarz Zadania badające umiejętności związane z funkcją kwadratową należą do najchętniej rozwiązywanych, toteż ogromna większość zdających podjęła mniej lub bardziej udaną próbę jego rozwiązania. Okazało się, że mocną stroną zdających są umiejętności wykorzystania podstawowych własności funkcji kwadratowej, takich jak wyznaczenie miejsc zerowych, zapis funkcji w postaci ogólnej oraz obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli. Natomiast algorytm wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym, choć należy do najbardziej typowych, sprawił zdającym wiele problemów. Zadanie pokazało, jak istotne i pomocne w doborze najbardziej racjonalnych metod rozwiązania problemu jest rozumienie sensu poszczególnych postaci funkcji kwadratowej. Posługiwanie się pojęciem funkcji kwadratowej i korzystanie z jej własności to podstawowe umiejętności z zakresu poziomu podstawowego. Tego typu zadania były umieszczane w arkuszach egzaminacyjnych na każdym egzaminie maturalnym i fakt, iż prawie połowa zdających nie potrafiła go z powodzeniem rozwiązać jest bardzo niepokojący.

Zadanie 10. *(3 pkt)*

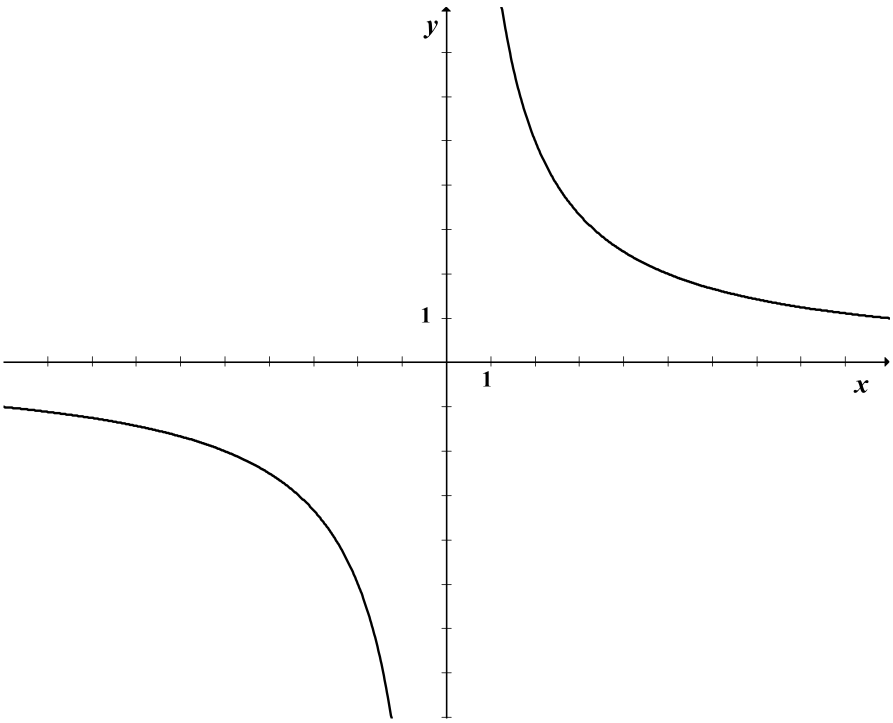
Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji h, określonej wzorem $h(x) = \frac{a}{x}$ dla $x \neq 0$.

Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $P = (2,5)$.

a) Oblicz wartość współczynnika a.

b) Ustal, czy liczba $h(\pi) - h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.

c) Rozwiąż nierówność $h(x) > 5$.



Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w obszarze II standardu wymagań egzaminacyjnych:
- wyznaczania wzoru funkcji o zadanych własnościach – II.2)a),
- odczytywania informacji ilościowych i jakościowych z wykresu funkcji – II.2)b).

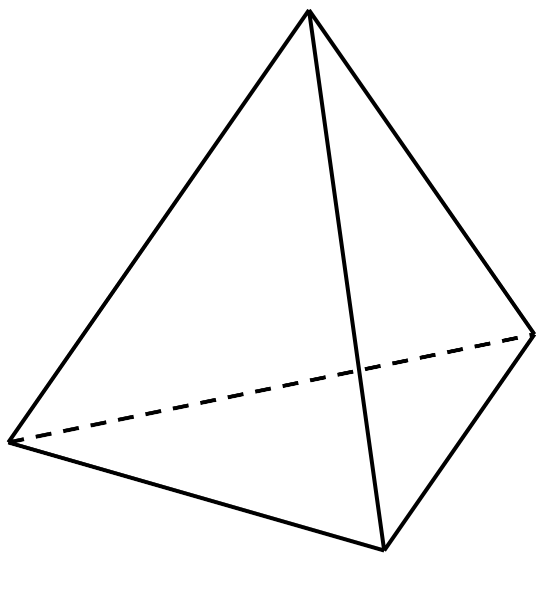
Rozwiązywalność zadania
54%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Po podstawieniu współrzędnych punktu *P* do wzoru funkcji zdający otrzymywali wartość współczynnika *a*. Z przedstawionego wykresu odczytywali znak liczby $h(\pi)$ oraz $h(-\pi)$ i na tej podstawie wnioskowali o znaku wyrażenia $h(\pi) - h(-\pi)$. Rozwiązanie nierówności $h(x) > 5$ również odczytywali z wykresu funkcji, prowadząc uprzednio prostą $y = 5$. Najczęściej jednak zapisywali prostą nierówność wymierną $\frac{10}{x} > 5$, następnie przekształcali ją do postaci nierówności kwadratowej i rozwiązywali.

Najczęściej powtarzające się błędy Zmiana kolejności współrzędnych punktu P, która skutkowała błędnym wyznaczeniem wartości współczynnika a. Często pojawiały się błędy rachunkowe w przekształcaniu wyrażenia $h(\pi)-h(-\pi)$, które powodowały, że ustalenie jego znaku nie mogło zostać pozytywnie ocenione. Najczęściej jednak zdający popełniali błędy w rozwiązywaniu elementarnej nierówności wymiernej, mnożąc obie jej strony przez x.
Komentarz Odczytywanie informacji ilościowych i jakościowych z wykresu funkcji to podstawowa umiejętność, którą powinien posiadać każdy, kto wybiera matematykę jako przedmiot egzaminacyjny. Wyznaczenie współczynnika we wzorze funkcji, mając dane współrzędne punktu należącego do wykresu tej funkcji, okazało się standardową czynnością i zdający w większości potrafili go obliczyć. Problemem okazało się określenie znaku wartości funkcji dla argumentu π. Przekształcanie wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby niewymierne również nie było mocną stroną zdających, wręcz powodowało, że niektórzy z nich rezygnowali z rozwiązywania tego fragmentu zadania. Część abiturientów posłużyła się kalkulatorem i otrzymała wynik, który pozwalał natychmiast rozwiązać postawiony w treści zadania problem. Treść polecania w podpunkcie c) nie narzucała metody rozwiązania podanej nierówności. Analizując prace zdających, można stwierdzić, że metoda graficzna nie jest naturalnym sposobem rozwiązywania tego typu zadań. Prawdopodobnie sformułowanie „rozwiąż nierówność” kojarzy się z metodą algebraiczną i taką też zastosowało wielu maturzystów.

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem β. Oblicz $\cos\beta$ i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość β z dokładnością do $1°$.



Sprawdzane umiejętności

Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardach wymagań egzaminacyjnych:

- przetwarzania informacji przedstawionych w postaci równania w inną postać ułatwiającą rozwiązanie problemu – standard III.1)c),
- podania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci równania – standard III.1)a),
- zaznaczania kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy – standard I.8)b),
- podania miary kąta, gdy znana jest wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta – standard II.2)a).

Rozwiązywalność zadania

32%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Na dołączonym do zadania rysunku zdający zaznaczali kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy β. Zapisywali równanie opisujące pole powierzchni bocznej ostrosłupa w zależności od wysokości *h* ściany bocznej: $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, a następnie wykorzystywali funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym, w którym występuje kąt β oraz własności odcinków w trójkącie równobocznym do wyznaczenia wartości $\cos\beta$. Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytywali miarę kąta β.

Najczęściej powtarzające się błędy

Najczęstszym, powtarzającym się w wielu pracach, błędem było zaznaczenie niewłaściwego kąta (kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy lub krawędzi bocznej do krawędzi podstawy). Częstym błędem była też niewłaściwa interpretacja treści zadania. Zdający uznawali podane pole powierzchni bocznej za pole jednej ściany bocznej i w związku z tym konstruowali równanie, które nie korespondowało z danymi. Niektórzy zdający mylili definicje funkcji trygonometrycznych obliczając $\sin\beta$ zamiast $\cos\beta$. Błędy popełniane przy odczytywaniu z tablic miary kąta, gdy znana jest wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta, świadczą o małym doświadczeniu zdających w rozwiązywaniu zadań tego typu.

Komentarz

Rozwiązywanie zadania ze stereometrii wymaga zawsze bardzo uważnej analizy jego treści, starannego zaplanowania swojego postępowania i sprawnego posługiwania się pojęciami charakterystycznymi dla tego działu materiału. Właściwe przetworzenie podanych informacji to klucz do znalezienia poprawnego rozwiązania. W wyniku tych działań zdający otrzymywali równanie $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{15} \cdot h}{5}$, z którego można było wyznaczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa lub długość wysokości ściany bocznej. Kolejny krok to zastosowanie definicji kosinusa żądanego kąta. Odczytanie z tablic miary kąta z wymaganą dokładnością kończy rozwiązanie zadania. Brak świadomości faktu, że wyrażenie długości potrzebnych odcinków w zależności od tej samej zmiennej, wystarcza w tym zadaniu do jednoznacznego wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznej kąta β, wielu zdającym uniemożliwiło rozwiązanie zadania.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

a) A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.
b) B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.
c) C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

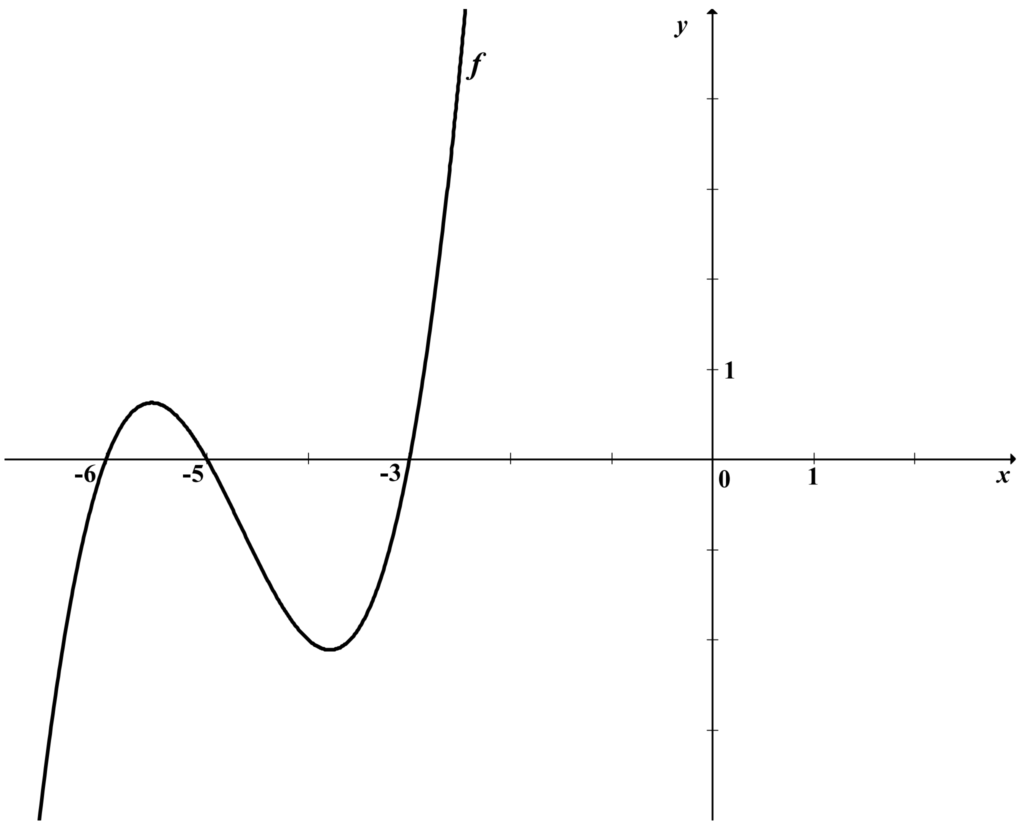
Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w obszarze II.2)a) standardów : • dobierania modelu matematycznego do doświadczenia losowego i obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia losowego.
Rozwiązywalność zadania 56%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający opisywali Ω tego doświadczenia jako zbiór wszystkich uporządkowanych par, których wyrazy mogą się powtarzać i każdy z tych wyrazów może być jedną z liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Obliczali moc Ω i wyznaczali liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających każdemu ze zdarzeń A, B, C oraz obliczali ich prawdopodobieństwo.
Najczęściej powtarzające się błędy Wypisując wszystkie wyniki dwukrotnego rzutu kostką, niektórzy zdający „gubili” część z nich, a stosując metodę drzewa pomijali istotne gałęzie, co skutkowało błędnymi wynikami obliczeń liczby wszystkich wyników lub liczby wyników sprzyjających omawianym zdarzeniom. Sporadycznie pojawiały się błędy w stosowaniu klasycznej definicji prawdopodobieństwa lub metody obliczania prawdopodobieństw zdarzeń za pomocą drzewa.
Komentarz Bardzo typowe, wręcz klasyczne zadanie z rachunku prawdopodobieństwa, którego rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych. Dobranie właściwego modelu matematycznego, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „klasyczna definicja prawdopodobieństwa” wystarczało do otrzymania poprawnych wyników. Zdający stosowali różne techniki konstruowania modelu matematycznego. Wielu z nich wypisywało wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu kostką jako zbiór par, inni przedstawiali Ω za pomocą kwadratu o 36 polach, jeszcze inni budowali drzewo. Każdy, kto przygotowując się do egzaminu rozwiązał choćby kilka zadań z rachunku prawdopodobieństwa nie powinien mieć problemów z rozwiązaniem tego zadania.

Arkusz egzaminacyjny dla poziomu rozszerzonego

Arkusz dla poziomu rozszerzonego (czas trwania egzaminu 180 minut) zawierał 12 zadań otwartych. Sprawdzały one wiadomości i umiejętności określone w standardach wymagań egzaminacyjnych dla poziomu rozszerzonego.
Zadania egzaminacyjne w tym arkuszu badały przede wszystkim umiejętność poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego oraz argumentowania i prowadzenia matematycznego rozumowania.
Tematyka zadań egzaminacyjnych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego obejmowała większość treści z podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące własności funkcji z wartością bezwzględną, funkcji kwadratowej, logarytmicznej i wielomianów, ciągów, jednokładności, zastosowania funkcji trygonometrycznych w planimetrii i stereometrii oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Wielomian *f*, którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0)=90$. Wielomian g dany jest wzorem $g\left(x\right)=x^3-14x^2+63x-90$. Wykaż, że $g\left(x\right)=-f\left(-x\right)$ dla $x\in R$.



Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardzie III.2)a)b): • interpretowania treści zadania, formułowania i uzasadniania wniosków.
Rozwiązywalność zadania 71%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających Znakomita większość zdających, wnioskując na podstawie kształtu wykresu, przyjęła, że jest on ilustracją wielomianu stopnia trzeciego i wykazała prawdziwość tezy. Maturzyści, zapisywali funkcję f jako iloczyn trzech czynników liniowych $f(x)=a(x+6)(x+5)(x+3)$ i korzystając z faktu, że $f(0)=90$, obliczali współczynnik a. W drugiej części rozwiązania zdający sprawdzili jaką postać ma wielomian $-f(-x)$ i wyciągnęli wnioski co do równości wielomianów $g(x)$ i $-f(-x)$. Sporadycznie zdarzały się prace, w których zdający zauważali, że wykres może przedstawiać wielomian stopnia wyższego niż 3 i stwierdzali, że wielomiany różnych stopni nie mogą być równe, co kończyło rozwiązanie. Część zdających sprawdzała, czy wielomiany $g(x)$ i $-f(-x)$ mają te same wartości dla różnych argumentów x i na postawie tego formułowała wnioski, korzystając z faktu, że jeżeli dwa wielomiany stopnia 3 mają równe wartości w czterech różnych punktach, to są równe.
Najczęściej powtarzające się błędy Rozwiązując zadanie zdający popełniali liczne błędy rachunkowe. Między innymi przy przejściu z postaci iloczynowej wielomianu f do zapisu tego wielomianu w postaci ogólnej. Popełniali również błędy w znakach przy wyznaczaniu wielomianu $-f(-x)$ (głównie w potęgowaniu liczby ujemnej). W licznych przypadkach po wyznaczeniu $-f(-x)$ nie formułowali wniosków. Część zdających miała trudności z zapisem wielomianu $f(x)$ w postaci iloczynowej. Zapisywali wielomian f w postaci ogólnej: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, tworzyli układ równań, którego najczęściej nie potrafili rozwiązać. Zdający, którzy sprawdzali równość wielomianów $g(x)$ i $-f(-x)$, poprzez porównywanie ich wartości w różnych punktach, w wielu przypadkach ograniczali się do 3 różnych punktów.
Komentarz Zadanie to było zadaniem łatwym. Znakomita większość zdających postąpiła zgodnie z konwencją przyjętą w podręcznikach i zbiorach zadań, iż jeśli funkcja jest zdefiniowana wykresem, to jest to funkcja określona wzorem najprostszym (w naszym przypadku na podstawie kształtu wykresu zdający przyjęli, że jest ona wielomianem stopnia 3). Ci zdający, którzy zauważyli, że wielomian f może być wyższego stopnia niż trzy zinterpretowali treść zadania w sposób nierutynowy. Niejednoznaczności można było uniknąć dodając explicite w treści zadania, że wielomian f jest stopnia trzeciego. Tak sformułowane zadanie, nie było jednak zadaniem, które nie ma rozwiązania. W każdym przypadku maturzysta był w stanie udzielić jednoznacznej odpowiedzi. Próbę rozwiązania zadania podjęli prawie wszyscy zdający. W nielicznych przypadkach zdający nie widzieli związku między miejscami zerowymi funkcji i jej postacią iloczynową, co dziwi, gdyż rozkład wielomianu na czynniki występuje corocznie na egzaminie maturalnym. W większości przedstawionych rozwiązań zdający doprowadzili swoje rozumowanie do końca, ale część z nich miała trudności ze sformułowaniem wniosku o równości wielomianów $g(x)$ i $-f(-x)$.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|x-2|+|3x-6|<|\,x\,|$.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu sprawdzana była umiejętność opisana w obszarze II.2)a) standardów wymagań egzaminacyjnych:

- rozwiązywania nierówności liniowych z wartością bezwzględną.

Rozwiązywalność zadania

60%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający korzystali z definicji wartości bezwzględnej do zapisania nierówności w postaci nierówności liniowych z uwzględnieniem niezbędnych ograniczeń:

$-4x+8<-x$ dla $x\in(-\infty,\,0)$; $-4x+8<x$ dla $x\in\langle 0,2)$; $4x-8<x$ dla $x\in\langle 2,\infty)$.

Po rozwiązaniu każdej nierówności wyznaczali zbiór rozwiązań.

Inną dość często spotykaną metodą było sprowadzenie nierówności do postaci $4|x-2|<|x|$ i podniesienie obu jej stron do drugiej potęgi.

Sporadycznie zdający rozwiązywali nierówność metodą graficzną. Rysowali wykresy funkcji $f(x)=4|x-2|$ i $g(x)=|x|$, a następnie próbowali odczytać rozwiązanie.

Najczęściej powtarzające się błędy

Najczęstszym błędem było nieprawidłowe stosowanie przez zdających definicji wartości bezwzględnej, np.: $4|x-2|=4x-8$ gdy $x\in\langle 0,\,2)$. Występowały błędy przy rozwiązywaniu nierówności liniowych, które powodowały, że maturzyści otrzymywali zbiory, z którymi nie potrafili sobie poradzić, zapisując ostateczne rozwiązanie.

Zdarzały się również prace, w których zdający poprawnie stosowali definicję wartości bezwzględnej i poprawnie zapisywali nierówności w przedziałach: $(-\infty,0)$, $\langle 0,2)$, $\langle 2,\infty)$, lecz zapisując rozwiązania, nie uwzględniali tych ograniczeń.

Komentarz

Na podkreślenie zasługuje fakt, że poprawne rozwiązanie zadania przedstawiła duża grupa zdających. Było to zadanie o umiarkowanej trudności. Pojawiające się w rozwiązaniach błędy pokazują, że część zdających nie opanowała w dostatecznym stopniu umiejętności stosowania definicji wartości bezwzględnej, mimo że zadanie z wartością bezwzględną pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.

W prezentowanych rozwiązaniach zdający pokazują przede wszystkim „rzemiosło”, a nie twórcze poszukiwanie rozwiązań optymalnie najprostszych.

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - \left(p^2 + q^2\right)x + \left(p + q\right) = 0$ z niewiadomą x. Oblicz wartości p i q.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu była badana umiejętność z obszaru III.1)a) standardów wymagań egzaminacyjnych: • opisywania danej sytuacji problemowej w postaci układu równań, oraz umiejętność opisana w standardzie II.2)a): • rozwiązywania układu równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno równanie jest stopnia drugiego.
Rozwiązywalność zadania 68%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Przeważająca część maturzystów w rozwiązaniu wykorzystywała wzór na rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe. Zdający zapisali równanie kwadratowe w postaci iloczynu czynników liniowych $\left(x - 5 - \sqrt{23}\right) \cdot \left(x - 5 + \sqrt{23}\right) = 0$, które przekształcali do postaci ogólnej, a następnie porównywali współczynniki obu postaci otrzymując układ równań $p^2 + q^2 = 10$ i $p + q = 2$. Rozwiązując ten układ, otrzymywali wartości współczynników p i q. Część zdających otrzymywała powyższy układ równań po zastosowaniu wzorów Viete´a.
Najczęściej powtarzające się błędy Maturzyści często popełniali błędy w czasie przekształcania równania $\left(x - 5 - \sqrt{23}\right)\left(x - 5 + \sqrt{23}\right) = 0$ do postaci ogólnej. Wielu z nich nie radziło sobie z rozwiązaniem układu równań $p^2 + q^2 = 10$ i $p + q = 2$, popełniali liczne błędy przy stosowaniu wzorów skróconego mnożenia.
Komentarz Przystępując do rozwiązania zadania zdający mieli do wyboru różne metody jego rozwiązania. Niektórzy z nich nie potrafili dobrać optymalnie najprostszej metody rozwiązania zadania, np. zdarzały się prace, w których zdający wstawiali do równania $x^2 - \left(p^2 + q^2\right)x + \left(p + q\right) = 0$ liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$. Otrzymywali skomplikowane równanie, którego rozwiązanie najczęściej pomijali bo wymagało ono żmudnych rachunków, z którymi sobie nie radzili. Zadanie pokazało, jak ważne jest rozumienie sensu poszczególnych postaci trójmianu kwadratowego, by móc je zastosować w konkretnej sytuacji. Zdziwienie budzi fakt, że wielu z nich ma problemy ze stosowaniem podstawowych wzorów mimo, że są one zamieszczone w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych* dostępnym na egzaminie maturalnym. Było to zadanie o umiarkowanej trudności.

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w obszarze II.2)a) standardów wymagań egzaminacyjnych: • stosowania znanych zależności do rozwiązywania problemu matematycznego, • rozwiązywania równań trygonometrycznych.
Rozwiązywalność zadania 69%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający wykorzystywali „jedynkę trygonometryczną” i zapisywali dane równanie trygonometryczne w postaci: $4\left(1-\sin^2 x\right) = 4\sin x + 1$. Następnie wprowadzali pomocniczą niewiadomą i rozwiązywali równanie kwadratowe $4t^2 + 4t - 3 = 0$. Po analizie przydatności otrzymanych wyników rozwiązywali elementarne równanie trygonometryczne $\sin x = \frac{1}{2}$ i zapisywali jego rozwiązania należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pojawiały się również rozwiązania graficzne. Zdający szkicowali wykresy funkcji $y = 4\cos^2 x$ i $y = 4\sin x + 1$, następnie odczytywali punkty przecięcia się wykresów funkcji i sprawdzali, czy są one rozwiązaniami podanego równania.
Najczęściej powtarzające się błędy Często popełnianym przez zdających błędem było podstawienie $t = \sin^2 x$ i niekonsekwentne do niego zapisanie równania w postaci $4t^2 + 4t - 3 = 0$. Wprowadzając zmienną t maturzyści pomijali założenie $t \in \langle -1, 1 \rangle$. W konsekwencji nie odrzucali wyniku $t_2 = -\frac{3}{2}$ lub odrzucali go ale z błędnych powodów, np. $\sin x < 0$. Liczną grupę tworzyli zdający, którzy poprawnie rozwiązali równanie $\sin x = \frac{1}{2}$, ale podając odpowiedź, nie uwzględnili warunku $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
Komentarz Zdający, którzy przystąpili do rozwiązania równania metodą algebraiczną, zazwyczaj nie mieli problemów z doborem strategii zapewniającej sukces w rozwiązaniu zadania. „Jedynka trygonometryczna” to dobrze znana i umiejętnie stosowana przez większość z nich zależność. Warto również podkreślić, iż zdający nie mieli problemu z rozwiązaniem elementarnego równania trygonometrycznego, chociaż nie zawsze pamiętali o wskazaniu rozwiązań z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Rozwiązania z wykorzystaniem wykresów funkcji trygonometrycznych z reguły nie pozwalały zdającym na poprawne wyznaczenie odpowiedzi. Było to dla zdających zadanie łatwe.

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dane jest równanie $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru p.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w III obszarze standardów wymagań egzaminacyjnych: • dobierania odpowiedniego algorytmu do sytuacji problemowej – III.1)b), • formułowania i uzasadniania wniosków oraz opisywania ich w sposób czytelny i poprawny językowo – III.2)b).
Rozwiązywalność zadania 47%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Większość poprawnych rozwiązań tego zadania zawierała dyskusję liczby rozwiązań równania $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ na podstawie wykresu funkcji $f(x)=\left|\frac{2}{x}+3\right|$ dla $x\in R\setminus\{0\}$. Zdający sporządzali wykres funkcji f i z niego odczytywali liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ z niewiadomą x w zależności od parametru p. Pojawiały się także rozwiązania, w których zdający, korzystając z definicji wartości bezwzględnej, zapisywali, że dla $p<0$ równanie $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ nie ma rozwiązania, a dla $p=0$ ma jedno rozwiązanie. Następnie dla $p>0$ zapisywali alternatywę równań $x(p-3)=2$ lub $x(p+3)=-2$ i dyskutowali liczbę rozwiązań równania dla $p=3$ i $p>0$ i $p\neq 3$.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający popełniali błędy już na etapie rysowania wykresu funkcji $f(x)=\left|\frac{2}{x}+3\right|$ dla $x\in R\setminus\{0\}$, np. źle odczytywali współrzędne wektora, o który należało przesunąć wykres funkcji $y=\frac{2}{x}$. Niektórzy zdający mimo poprawnie narysowanego wykresu funkcji źle wyznaczali liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru p (np. nie zauważali, że dla $p=3$ równanie ma jedno rozwiązanie). Zdający, którzy stosowali metody algebraiczne rozwiązania zadania popełniali błędy na etapie stosowania definicji wartości bezwzględnej, zapominając o założeniu $x\neq 0$, pisali: $\left\|\frac{2}{x}+3\right\|=\begin{cases}\frac{2}{x}+3 & \text{dla } x\geq -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{x}-3 & \text{dla } x<-\frac{2}{3}\end{cases}$ lub źle interpretowali treść zadania: $\begin{cases}p>0\Rightarrow \frac{2}{x}+3=p\\ p<0\Rightarrow \frac{2}{x}+3=-p\end{cases}$. Wśród rozwiązań były też takie, w których zdający poprawnie stosowali definicję wartości bezwzględnej i rozwiązali równania wymierne $\frac{2}{x}+3=p$ i $\frac{2}{x}+3=-p$, ale nie przeprowadzali dyskusji liczby rozwiązań równania w zależności od parametru p. Zdający mieli również problemy z czytelnym i poprawnym językowo opisem rozwiązania zadania.

Komentarz
Zadanie było dla zdających trudne. Wymagało dobrania odpowiedniego algorytmu obliczania liczby rozwiązań równania z parametrem, który zapewniał szybkie i skuteczne rozwiązanie problemu. Najefektywniejsze były odczytanie liczby rozwiązań w oparciu o szkic wykresu funkcji $f(x)=\left|\frac{2}{x}+3\right|$ dla $x\in R\setminus\{0\}$. Wielu zdających nie potrafiło jednak bezbłędnie wykonać wykresu. W takim przypadku przyjęcie metody graficznej kończyło się zazwyczaj porażką.
Rozwiązania algebraiczne z reguły zawierały błędy rachunkowe lub logiczne. Zdający mieli problemy z formułowaniem i uzasadnianiem wniosków. Ta metoda rozwiązania zadania zazwyczaj nie prowadziła zdających do sukcesu.
Zadania o podobnej problematyce pojawiały się już na egzaminie maturalnych, a mimo to sprawiło ono maturzystom wiele problemów. Wprawdzie ponad połowa z nich sporządziła poprawny wykres funkcji *f*, ale prawidłową liczbę rozwiązań odczytała już mniejsza grupa. Przedstawione przez maturzystów rozwiązania pokazują, że znają oni metodę rozwiązywania tego typu problemów ale mają duże braki warsztatowe.

Zadanie 6. *(3 pkt)*

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a,b,c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a=b=c$.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w obszarze III.2)R standardów:
- przeprowadzania dowodu twierdzenia.

Rozwiązywalność zadania
58%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdający korzystając z własności ciągów arytmetycznego oraz geometrycznego zapisali układ równań $b=\frac{a+c}{2}$, $b^2=ac$ i otrzymywali zależność $(a-c)^2=0$, z której wnioskowali, że $a=c$. Korzystając z zależności $b=\frac{a+c}{2}$ uzyskiwali tezę twierdzenia.

Najczęściej powtarzające się błędy
Wielu zdających miało problemy z właściwą interpretacją implikacji. Dowodzili oni, że ciąg (a,b,c), w którym $a=b=c$ jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym.
Maturzyści popełniali także szereg błędów rachunkowych i logicznych. Część zdających poprawnie stosowała definicje ciągów arytmetycznego i geometrycznego, ale prowadząc dowód twierdzenia nie uwzględniała założeń ($a\neq 0$) i nie rozpatrywała przypadku ciągu $(0,0,0)$, zapisując, np. $2aq=a+aq^2/a$; $2q=1+q^2$; $q-1=0$; $q=1$ zatem $a=b=c$.
Inni błędnie wnioskowali o równości wyrazów ciągu, których kwadraty mają równe wartości: $a=c$ i $b^2=ac$; $b^2=a^2$; $b=a$ lub rozwiązując równania wymierne nie czynili stosownych założeń, co prowadziło do niepoprawnego wnioskowania: $\frac{r}{q-1}=\frac{2r}{(q-1)(q+1)}$; $1=\frac{2}{q+1}$; $q=1$.

Komentarz Przeprowadzenie dowodu tego twierdzenia wymagało od zdającego znajomości podstawowych własności dotyczących ciągów oraz umiejętności logicznego formułowania i uzasadniania wniosków, poprawnego ich zapisywania w języku matematyki. Tego typu zadania niezależnie od treści, do których się odwołują, sprawiają problemy zdającym. W tym roku większość zdających próbowała zmierzyć się z problemem przeprowadzenia dowodu matematycznego zapewne ze względu na przyjazne zdającym treści – ciąg arytmetyczny i geometryczny. Na podstawie rozwiązań można wnioskować, że większości zdających znała własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego, to jednak nie wystarczyło do przeprowadzenia rozumowania. Podstawowym i najczęstszym błędem zdających było zakładanie prawdziwości tezy w dowodzie, co świadczy o niezrozumieniu zasad budowania i dowodzenia twierdzeń matematycznych.

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2+1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F=(0,\ 2)$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były sprawdzana umiejętność ze standardu II.2)a): • posługiwania się definicją odległości dwóch punktów, oraz umiejętnościami opisanymi w III obszarze standardów egzaminacyjnych: • zapisywania zależności i formułowania wniosków z podanych zapisów – III.2)b).
Rozwiązywalność zadania 30%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający poprawnie zapisywali współrzędne punktu *P* należącego do paraboli w zależności od jednej zmiennej. Wyznaczali odległość punktu *P* od osi *Ox* oraz od punktu *F*. Następnie porównywali odległości i wykazywali tożsamość. Część zdających wykazywała, że zbiorem punktów spełniających warunki zadania jest wskazana parabola.
Najczęściej powtarzające się błędy W rozwiązaniach przedstawionych przez maturzystów najczęstszym błędem było wykazywanie tezy na wybranych punktach (a nie dowolnych). Niektórzy zdający wyznaczali odległości konkretnego punktu obranego na paraboli odpowiednio od osi *Ox* i od punktu $F=(0,\ 2)$. Część piszących uzasadniała równą odległość punktów paraboli o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2+1$ na podstawie parzystości funkcji kwadratowej. Wiele błędów zdający popełniali przy wyznaczaniu odległości punktu *P* od osi *Ox* oraz przy wyznaczaniu odległości punktu *P* od punktu *F*. Część z tych, którzy poprawnie podstawili współrzędne punktu należącego do paraboli do wzoru na odległość między dwoma punktami, popełniła błędy nie uwzględniając własności wartości bezwzględnej. Pojawiały się rozwiązania, w których zdający próbowali obliczać odległość punktu od paraboli ze wzoru na odległość punktu od prostej. Część zdających miała kłopoty z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia. Pojawiały się również nieporadne, opisowe uzasadnienia tezy.

Komentarz
Problem postawiony w tym zadaniu był dla maturzystów trudny. Zdający często przerywali rozwiązywanie zadania po zapisaniu współrzędnych punktu P należącego do paraboli w zależności od jednej zmiennej. Niepokojący jest fakt, że dla niektórych zdających słowo „równoległy” jest synonimem słowa „równoodległy”. Uczniowie często odczytywali słowo „równoodległy” jako „równoległy” i dowodzili, że punkt jest równoległy do osi Ox lub parabola jest równoległa do osi Ox.
Pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali, że punkt $F=(0,2)$ jest ogniskiem paraboli, zatem każdy punkt paraboli jest równooddalony od osi Ox (kierownicy) i ogniska. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający nie powoływali się bezpośrednio na własności paraboli oraz pojęcie ogniska i kierownicy. W konsekwencji zapisywali, że wszystkie punkty paraboli są równoodległe od punktu F i od osi Ox, gdyż funkcja ta jest symetryczna względem osi Oy, a odległości punktu F i osi Ox od wierzchołka paraboli na osi Oy są równe. Z wielu przedstawionych prób rozwiązań widać, że piszący korzystali z definicji paraboli, nie nazywając punktu F ogniskiem, a osi Ox kierownicą paraboli. Dużym problemem okazał się język matematyczny, którym zdający zapisywali swoje odpowiedzi. Cieszy jednak fakt, że pojawiły się ciekawe rozwiązania prowadzące do równania paraboli, w których zdający poszukiwali zbioru punktów należących do symetralnej odcinka $|FP|$, gdzie P jest punktem osi Ox.

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x-16)^2+y^2=4$ jest okrąg o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Sprawdzane umiejętności
W zadaniu były sprawdzane umiejętności ze standardu II.2)a)

- posługiwania się definicją i własnościami jednokładności.

Rozwiązywalność zadania
44%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdecydowana większość zdających podejmujących próbę rozwiązania zadania poprawnie zapisywała współrzędne środków okręgów i ich promienie. Następnie część zdających podawała, że skala omawianej jednokładności jest równa (-2) i powołując się na własności jednokładności zapisywała równanie $\overrightarrow{SS_2}=-2\cdot\overrightarrow{SS_1}$. Porównując odpowiednie współrzędne wektorów, zdający wyznaczali współrzędne środka jednokładności S.
Druga grupa wyznaczała równanie prostej, do której należą środki obu okręgów. Kolejną czynnością było wybieranie punktu i jego obrazu w danej jednokładności o skali $k=-2$ oraz wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez te punkty. Zdający otrzymywali zatem układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi i z niego obliczali współrzędne środka S szukanej jednokładności.

Najczęściej powtarzające się błędy
Przeważająca liczba rozwiązań tego zadania ograniczała się do wykonania rysunku oraz wyznaczenia promieni i środków okręgów. Zdający często przerywali rozwiązanie zadania po podaniu skali jednokładności. Odnotowano również takie rozwiązania, w których błędnie wskazano skalę jednokładności. Na podstawie przedstawionych rozwiązań można wywnioskować, iż zdający mają problemy w stosowaniu własności jednokładności, co więcej nie znają pojęcia jednokładności. Powodowało to problemy przy wyznaczaniu

środka jednokładności, np. przyjmowano, że środkiem jednokładności jest środek odcinka łączącego środki okręgów. Ci spośród zdających, którzy zapisywali równanie prostej, do której należą środki obu okręgów, popełniali błędy rachunkowe przy wyznaczaniu równań prostych i rozwiązywaniu układu dwóch równań.
Komentarz Rozwiązanie zdania wymagało od zdających rozumienia pojęcia jednokładności i umiejętności stosowania własności jednokładności. Zdający mieli poważne trudności z wyznaczeniem środka jednokładności, stąd duża liczba prac, w których maturzyści zakończyli rozwiązywanie problemu na zapisaniu promieni i środków okręgów. Niektórzy maturzyści rozwiązywali zadanie w oparciu o podobieństwo trójkątów, obliczali współrzędne środka jednokładności wykorzystując zależności między współrzędnymi punktów S_1, S_2, a ich odległościami od osi *Ox* i *Oy*.

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f\left(x\right)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8x-x^2\right)$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były sprawdzane umiejętności z obszaru II.2)a) standardów wymagań egzaminacyjnych: • posługiwania się definicją i własnościami funkcji kwadratowej, • posługiwania się definicją i własnościami funkcji logarytmicznej, oraz umiejętnością opisaną w standardzie II.2)R: • formułowania wniosków wynikających z postaci badanego wyrażenia.
Rozwiązywalność zadania 34%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający rozwiązywali nierówność kwadratową $8x-x^2>0$ i wyznaczali dziedzinę funkcji logarytmicznej. Następnie zapisywali, że dana funkcja logarytmiczna osiąga najmniejszą wartość wtedy, gdy wyrażenie $8x-x^2$ przyjmuje wartość największą. Obliczali największą wartość funkcji kwadratowej $y=8x-x^2$, następnie obliczali najmniejszą wartość funkcji *f*, korzystając z definicji logarytmu.
Najczęściej powtarzające się błędy Rozwiązanie tego zadania sprawiło zdającym dużo kłopotów. Bardzo często maturzyści kończyli rozwiązywanie zadania na wyznaczeniu dziedziny funkcji logarytmicznej. Zdarzały się jednak prace, gdzie błędnie wyznaczono dziedzinę, czyli niewłaściwe rozwiązano nierówność kwadratową. Niepokojące są te rozwiązania, które pokazują brak umiejętności ustalania warunków dziedziny funkcji logarytmicznej. Pojawiały się rozwiązania, gdzie zdający prawidłowo rozwiązywali nierówność kwadratową, ale dziedzinę funkcji zapisywali np. w postaci $R\setminus(0,8)$. Część piszących formalnie nie powoływała się na monotoniczność funkcji logarytmicznej, ale z dalszego rozwiązania zadania wynikało, że prawidłowo z niej skorzystała. Zdarzały się prace, w których błędnie wyznaczono argument, dla którego funkcja $8x-x^2$ osiąga swą największą wartość. Zanotowano grupę zdających, którzy poprawnie podali odciętą wierzchołka paraboli o równaniu $y=8x-x^2$, ale popełnili błędy rachunkowe przy wyznaczaniu najmniejszej wartości w funkcji logarytmicznej. Część piszących nie obliczyła najmniejszej wartości funkcji *f*, pozostawiając zapis $f(4)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}16$.

Komentarz
Część zdających nie potrafiła skorzystać z faktu, że funkcja logarytmiczna o podstawie równej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest malejąca. W konsekwencji nie zauważyli, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla największego argumentu, co spowodowało przerwanie dalszego rozwiązywania zadania i poprzestanie na wyznaczonej dziedzinie funkcji f. Pojawiły się również rozwiązania, w których zdający zastosowali pochodną funkcji do wyznaczenia największej wartości funkcji kwadratowej. Problem postawiony w tym zadaniu był dla maturzystów trudny.

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Sprawdzane umiejętności
Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w obszarze II.2)a) standardów :
- dobierania modelu matematycznego danego doświadczenia losowego i wyznaczania prawdopodobieństwa zdarzenia,
- rozwiązywania równania wymiernego.

Rozwiązywalność zadania
62%

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdający oznaczali niewiadomą n liczbę kobiet i obliczali moc zbioru Ω, liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A i prawdopodobieństwo zdarzenia A. Zapisali i rozwiązywali równanie wynikające z obliczonego prawdopodobieństwa i warunków zadania: $\frac{n-1}{3(3n-1)}=\frac{1}{10}$. Część maturzystów obliczała prawdopodobieństwo zdarzenia A z wykorzystaniem drzewa.

Najczęściej powtarzające się błędy
Część zdających nie zauważała związku między liczbą kobiet, mężczyzn oraz łączną liczbą osób $(n+2n=3n)$ – szczególnie, gdy próbowali rozwiązywać zadanie za pomocą drzewa. Zdający wybierali inny model do wyliczenia mocy Ω i inny do obliczania mocy zdarzenia A. Często występowały błędy rachunkowe w obliczaniu symbolu Newtona $\binom{3n}{2}$ lub $\binom{n}{2}$. Zdarzały się rozwiązania, w których zdający niepoprawnie stosowali symbol Newtona, np.: $\binom{n}{2}=\frac{2!\,(n-2)!}{n!}$, $\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!}$. lub: $\binom{3n}{2}=\frac{3n!}{(3n-2)!\,2!}=\frac{3n\,(3n-2)(n-1)}{2}$.

Ci spośród zdających, którzy wybrali metodę drzewa, popełniali błędy opisując prawdopodobieństwo na jego gałęziach. Wystąpiły również błędy rachunkowe przy

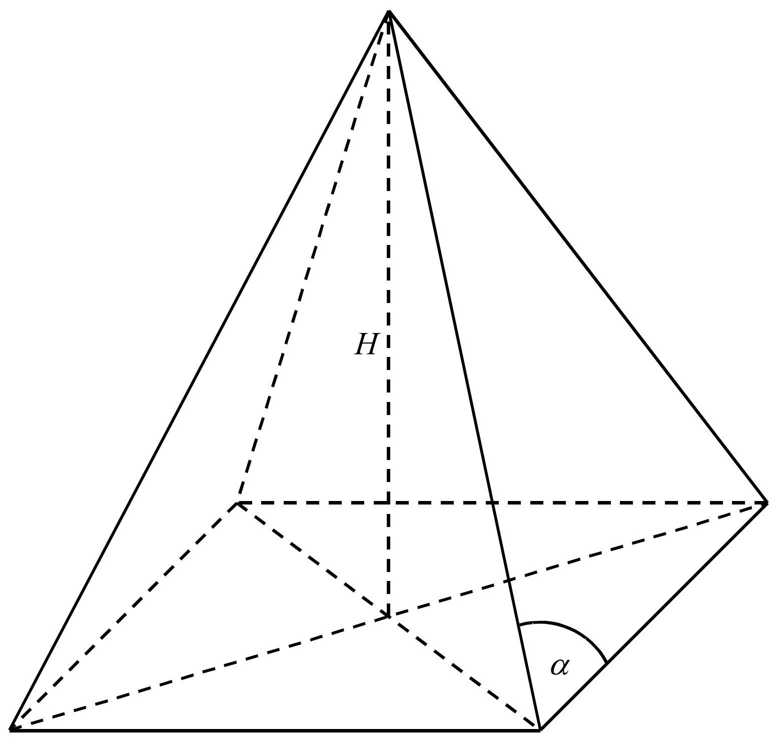
rozwiązywaniu warunku zadania $P(A)=0{,}10$, czyli przy rozwiązywaniu prostego równania wymiernego. Zaskakujący jest fakt, iż w przypadku otrzymania rozwiązań niecałkowitych, zdający pozostawiali rozwiązanie w takiej postaci. Co więcej odpowiadali na pytanie postawione w treści zadania, zapisując, np. kobiet było $2\frac{1}{3}$, a mężczyzn $4\frac{2}{3}$.
Komentarz W zadaniach tego typu zdający mają wykazać się umiejętnością budowania modelu matematycznego zgodnego z sytuacją opisaną w treści zadania. Błędem, który często można zaobserwować w rozwiązaniach jest stosowanie różnych modeli, innego do obliczenia mocy Ω i innego do obliczenia mocy zbioru zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu. Jedną z ostatnich ocenianych w zadaniu czynności była umiejętność rozwiązywania równania wymiernego. Dziwią prace, w których zdający nie potrafili poprawnie rozwiązać tego równania. Zaskakują również liczne prace, w których zdający nie weryfikują wyników z warunkami zadania.

Zadanie 11. *(5 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

a) Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3}\cdot\frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1}$.

b) Oblicz miarę kąta α, dla której objętość V danego ostrosłupa jest równa $\frac{2}{9}H^3$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w III obszarze standardów : • podawania opisu matematycznego danej sytuacji w postaci układu równań – III.1)a), • dobierania odpowiedniego algorytmu i oceniania przydatności otrzymanych wyników – III.1)b), oraz umiejętnościami opisanymi w II obszarze standardów: • stosowania podanego wzoru do rozwiązania problemu – II.1)a), • podania miary kąta, gdy dana jest wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta – II.2)a).
Rozwiązywalność zadania 50%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający zapisywali układ równań, który pozwalał wyznaczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa, np. $h=\frac{a}{2}\cdot \mathrm{tg}\alpha$ i $H^2+\frac{a^2}{4}=h^2$, a potem podstawiali obliczoną wielkość do wzoru opisującego objętość ostrosłupa. Z równania $\frac{4}{3}\cdot\frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}=\frac{2}{9}\cdot H^3$ obliczali $\mathrm{tg}\alpha$ i odczytywali miarę szukanego kąta α z *Tablic funkcji trygonometrycznych* zapisując ją z żądanym zaokrągleniem.
Najczęściej powtarzające się błędy Analizując rozwiązania tego zadania można było zauważyć brak umiejętności przeprowadzania dowodu. Zdający przekształcali wyrażenie do postaci $a^2=\frac{4H^2}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$ i ponownie wstawiali wyznaczone wyrażenie do wzoru na objętość ostrosłupa. Często zdający dobrze wyznaczyli związki między długością krawędzi podstawy ostrosłupa i wysokością ściany bocznej, czy też wysokością ostrosłupa, ale błędnie przekształcali wyrażenia algebraiczne, źle stosowali definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Zaskakujący jest fakt, iż pojawiły się rozwiązania, w których zdający błędnie zastosowali zależność między przekątną kwadratu a jego bokiem, np.: $\frac{d}{2}=a\sqrt{2}$. Wielu zdających zmieniło treść zadania, traktując ścianę boczną jak trójkąt równoboczny lub trójkąt prostokątny. W drugiej części zadania często występowały błędy rachunkowe typu $\mathrm{tg}^2\alpha-1=6$ stąd $\mathrm{tg}^2\alpha=5$. Zdający nie wykorzystywali do rozwiązania polecenia z podpunktu b) objętości ostrosłupa podanej w podpunkcie a) tylko konsekwentnie stosowali przez siebie obliczoną objętość. Niektórzy nie zaokrąglali miary kąta do pełnych stopni lub błędnie odczytywali wartości kąta dla obliczonej wartości funkcji trygonometrycznej.
Komentarz Pierwsza część zadania wymagała od zdającego umiejętności logicznego rozumowania i argumentowania prowadzącego do wykazania tezy. Większość maturzystów posłużyła się podstawowymi zależnościami zachodzącymi między bokami i kątami w trójkątach prostokątnych do wykazania pozostałych zależności, jednak kłopoty z bezbłędnym przekształcaniem wyrażeń algebraicznych spowodowały, że nie osiągali poprawnych odpowiedzi. W rozwiązaniach można było zauważyć, że wielu zdających nie zrozumiało istoty dowodu. Maturzyści przekształcali wyrażenie podane w treści zadania do innej postaci i wstawiali je ponownie do wzoru na objętość bryły i stwierdzali, że teza jest udowodniona.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w II oraz III obszarze standardów : • analizowania i interpretowania treści zadania, zapisywania zależności między obiektami matematycznymi, analizowania i interpretowania wyników – III.2)a), • posługiwania się znanymi twierdzeniami geometrii płaskiej – II.2)a).
Rozwiązywalność zadania 58%
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zdający wyznaczali długość przeciwprostokątnej danego trójkąta. Zapisali jego pole na dwa sposoby i obliczyli wysokość poprowadzoną z wierzchołka kata prostego. Do wyznaczenia długości szukanego odcinka wykorzystywali podobieństwo trójkątów lub funkcje trygonometryczne i własności trójkąta równoramiennego, rzadziej sięgali do twierdzenia sinusów lub kosinusów.
Najczęściej powtarzające się błędy Na etapie wstępnej analizy zadania maturzyści wykazali się zrozumieniem problemu i przedstawiali różne sposoby jego pokonania. W przedstawionych rozwiązaniach można jednak zauważyć, że błędy występowały w każdej z przedstawionych metod rozwiązania zadania. Zdający, stosując w rozwiązaniu podobieństwo trójkątów, źle zapisywali proporcję. Gdy podstawą rozwiązania było zastosowanie funkcji trygonometrycznych, nie potrafili ich bezbłędnie określić. Maturzyści, którzy stosowali twierdzenie sinusów lub kosinusów popełniali błędy w prawidłowym doborze kątów i boków, do których twierdzenie ma zastosowanie. Często zdający obliczali jedynie długość przeciwprostokątnej i na tym kończyli rozwiązanie.
Komentarz Najprostsza metoda rozwiązania tego zadania wymagała zastosowania twierdzenia Pitagorasa i wzoru na pole trójkąta. Część zdających umieściła trójkąt prostokątny ABC w układzie współrzędnych i korzystała w rozwiązaniu z metod analitycznych. Aby znaleźć współrzędne punktu D zdający rozwiązywali układ złożony z równania okręgu i prostej AB. Odnotowano również rozwiązania, w których maturzyści wykorzystywali podobieństwo trójkątów, twierdzenie sinusów i twierdzenie kosinusów. Wielość stosowanych metod pokazuje, że zdający dość swobodnie poruszają się po treściach związanych z geometrią ale mają duże trudności z ustaleniem strategii rozwiązania zadania. W rozwiązaniach widać brak umiejętności sprawnego przekształcania wyrażeń algebraicznych, a także liczne błędy rachunkowe.

PODSUMOWANIE

Na podstawie analizy wyników egzaminu maturalnego z matematyki oraz uwag egzaminatorów można stwierdzić, że maturzyści:

- Wykazali się umiejętnością wyboru poprawnego algorytmu rozwiązania dla sytuacji opisanej w zadaniu oraz stosowania w rozwiązaniu podanych wzorów.
- Wykazali się znajomością definicji funkcji i ich własności. Dotyczyło to w szczególności funkcji liniowej, funkcji kwadratowej oraz wielomianowej.
- Dobrze wykonywali obliczenia procentowe.
- Opanowali i z powodzeniem stosowali metody rozwiązywania prostych równań wielomianowych, nie mieli trudności z wykorzystaniem własności ciągów.
- W zadowalającym stopniu wykazali się znajomością podstawowych definicji, twierdzeń i pojęć związanych z geometrią.

Do słabiej opanowanych umiejętności należy zaliczyć:

- Zapisanie przedstawionych w zadaniu zależności w postaci wyrażenia algebraicznego, równania lub układu równań.
- Prowadzenie rozumowania typu dowód lub uzasadnienie swoich wniosków. Wielu zdających wykazywało brak krytycznego podejścia do otrzymanych wyników, nie weryfikowało otrzymanych rozwiązań z warunkami zadania.
- Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Popełniane błędy uniemożliwiały zdającym osiągnięcie poprawnego wyniku.
- Szkicowanie wykresów i badanie własności funkcji, w której wystąpiła wartość bezwzględna.
- Ustalanie strategii rozwiązania zadania, szczególnie z geometrii.

Zadania, w których zdający do wykonywania obliczeń, mogli zastosować proste algorytmy, znane twierdzenia i definicje były rozwiązywane poprawnie przez przeważającą liczbę maturzystów. Można więc stwierdzić, że zdający potrafią rozwiązywać typowe problemy o małym stopniu złożoności. Jednak problem dla wielu maturzystów stanowi zastosowanie wiadomości i umiejętności matematycznych w zadaniach, w których nie można wykorzystać gotowych algorytmów.

Zadania, w których zdający mieli wykazać się umiejętnościami opisanymi w III obszarze standardów egzaminacyjnych „potrafi argumentować i prowadzić rozumowanie typu matematycznego, formułuje i uzasadnia wnioski”, wymagały od maturzystów dojrzałości myślenia matematycznego i umiejętności doboru argumentów dla potwierdzenia bądź odrzucenia sformułowanej w zadaniu tezy. Cieszyły rozwiązania przemyślane, pokazujące w sposób jasny i czytelny pełne zrozumienie problemu. Wielu zdających przedstawiało jednak rozwiązania niepełne, nie udzielało odpowiedzi zgodnej z poleceniem. Były to rozwiązania z błędami wskazującymi na bezkrytycznie podchodzenie do uzyskiwanych wyników.

Analizując prace maturzystów można zauważyć, że poziom merytoryczny odpowiedzi był zróżnicowany, a język matematyczny, jakim posługiwali się piszący, był niejednokrotnie nieporadny. Strategia rozwiązywania zadania, a tym samym ustalenie kolejności działań zależała od umiejętności budowania modelu matematycznego odpowiadającego treści zadania, oraz w dużej mierze pomysłowości zdających, ich spostrzegawczości i umiejętności stosowania algorytmów. Tylko bardzo precyzyjne, bezbłędne wykonanie działań prowadziło zdającego do poprawnej odpowiedzi.

W związku z obowiązkowym od roku 2010 egzaminem maturalnym z matematyki niezbędne wydaje się ustalenie, w jakim zakresie nauczyciele realizują treści zawarte w podstawie programowej. Konieczne jest położenie nacisku w kształceniu matematycznym na rozwijanie umiejętności argumentowania i rozumowania oraz sprawnego operowania modelami matematycznymi. Potrzebna jest też refleksja na temat skuteczności procesu nauczania matematyki.