CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ
I SCHEMAT PUNKTOWANIA

MAJ 2014

Zadanie 1. (0–4)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{|x+3|+|x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej. Sporządzanie wykresu, odczytywanie własności i rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym związanych z proporcjonalnością odwrotną. (II.1.f, 4.m)

<u>Rozwiązanie</u>

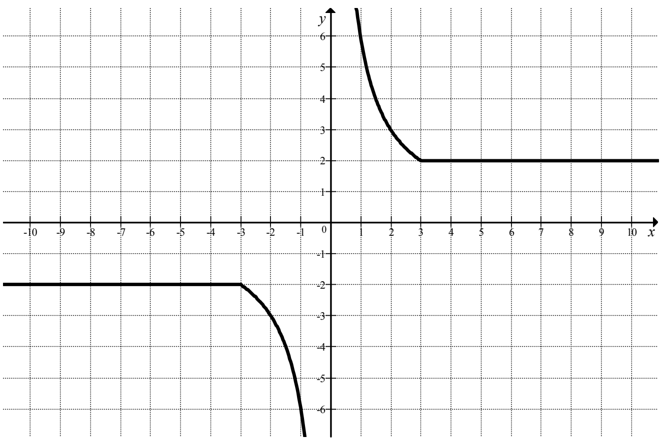
Wzór funkcji f możemy zapisać w każdym ze zbiorów: $(-\infty,-3)$, $\langle -3,3)\setminus\{0\}$, $\langle 3,+\infty)$ bez symbolu wartości bezwzględnej. Wówczas

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x+3)+\left[-(x-3)\right]}{x} & \text{dla } x\in(-\infty,-3)\\ \dfrac{x+3+\left[-(x-3)\right]}{x} & \text{dla } x\in\langle -3,0)\cup(0,3)\\ \dfrac{x+3+(x-3)}{x} & \text{dla } x\in\langle 3,+\infty)\end{cases},$$

czyli

$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{dla } x\in(-\infty,-3)\\ \dfrac{6}{x} & \text{dla } x\in\langle -3,0)\cup(0,3)\\ 2 & \text{dla } x\in\langle 3,+\infty)\end{cases}.$$

Wykres ma więc postać



Zbiorem wartości funkcji f jest $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,+\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający:
- zapisze przedziały: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3)$, $\langle 3, +\infty)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej

albo
- zaznaczy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3)$, $\langle 3, +\infty)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający zapisze licznik ułamka $\frac{|x+3|+|x-3|}{x}$ w przedziałach $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3)$, $\langle 3, +\infty)$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.:

$|x+3|+|x-3| = -(x+3)+\left[-(x-3)\right]$ dla $x \in (-\infty, -3)$,

$|x+3|+|x-3| = x+3+\left[-(x-3)\right]$ dla $x \in \langle -3, 0) \cup (0, 3)$,

$|x+3|+|x-3| = x+3+x-3$ dla $x \in \langle 3, +\infty)$.

<u>Uwaga</u>
Nie wymagamy, żeby zdający rozpatrując funkcję *f* w przedziale $\langle -3, 3)$ zapisał warunek $x \neq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający
- zapisze wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach popełniając błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu poda jej zbiór wartości

albo
- poprawnie narysuje wykres funkcji *f* i błędnie odczyta zbiór wartości (np. R).

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający poda zbiór wartości funkcji *f*: $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

Uwaga
Jeżeli zdający narysuje poprawnie wykres funkcji i nie poda zbioru jej wartości, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 2. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których funkcja kwadratowa $f(x)=x^2-(2m+2)x+2m+5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A=(x_1,0)$ i $B=(x_2,0)$ od prostej o równaniu $x+y+1=0$ jest równa 6.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań (również umieszczonych w kontekście praktycznym), prowadzących do badania funkcji kwadratowej. Obliczanie odległości punktu od prostej. (IV.4.l, 8.c)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Funkcja kwadratowa *f* ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $\Delta>0$. Zatem

$$\left[-(2m+2)\right]^2-4\cdot1\cdot(2m+5)>0,$$
$$4m^2-16>0,$$
$$4(m-2)(m+2)>0,$$
$$m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty).$$

Odległość punktu $A=(x_1,0)$ od prostej o równaniu $x+y+1=0$ jest równa

$$d_1=\frac{|1\cdot x_1+1\cdot0+1|}{\sqrt2}=\frac{|x_1+1|}{\sqrt2}.$$

Analogicznie odległość punktu $B=(x_2,0)$ od tej prostej jest równa $d_2=\dfrac{|x_2+1|}{\sqrt2}$.

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{|x_1+1|}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{|x_2+1|}{\sqrt2}\right)^2=6.$$

Przekształcając równoważnie tę równość otrzymujemy

$$\frac{(x_1+1)^2}{2}+\frac{(x_2+1)^2}{2}=6,$$
$$x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1=12,$$
$$x_1^2+x_2^2+2(x_1+x_2)-10=0,$$
$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)-10=0.$$

Wykorzystując wzory Viete’a otrzymujemy równanie z niewiadomą *m*

$$(2m+2)^2-2(2m+5)+2(2m+2)-10=0,$$
$$4m^2+8m+4-4m-10+4m+4-10=0,$$
$$4m^2+8m-12=0,$$
$$m^2+2m-3=0,$$
$$(m-1)(m+3)=0.$$

Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla $m = -3$ istnieją pierwiastki x_1, x_2.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Funkcja kwadratowa *f* ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $\Delta > 0$. Zatem

$$\left[-\left(2m+2\right)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot\left(2m+5\right) > 0,$$

$$4m^2 - 16 > 0,$$

$$4\left(m-2\right)\left(m+2\right) > 0,$$

$$m \in \left(-\infty, -2\right)\cup\left(2, +\infty\right).$$

Odległość punktu $A = \left(x_1, 0\right)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa

$$d_1 = \frac{\left|1\cdot x_1 + 1\cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|x_1 + 1\right|}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie odległość punktu $B = \left(x_2, 0\right)$ od tej prostej jest równa $d_2 = \dfrac{\left|x_2 + 1\right|}{\sqrt{2}}$.

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{\left|x_1+1\right|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\left|x_2+1\right|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6, \text{ czyli } \frac{\left(x_1+1\right)^2}{2} + \frac{\left(x_2+1\right)^2}{2} = 6.$$

Pierwiastki x_1, x_2 są równe:

$$x_1 = \frac{2m+2-\sqrt{4m^2-16}}{2} = m+1-\sqrt{m^2-4} \text{ oraz } x_2 = \frac{2m+2+\sqrt{4m^2-16}}{2} = m+1+\sqrt{m^2-4}.$$

Otrzymujemy więc równanie z niewiadomą *m*

$$\frac{\left(m+1-\sqrt{m^2-4}+1\right)^2}{2} + \frac{\left(m+1+\sqrt{m^2-4}+1\right)^2}{2} = 6,$$

$$\left(m+2-\sqrt{m^2-4}\right)^2 + \left(m+2+\sqrt{m^2-4}\right)^2 = 12,$$

$$\left(m+2\right)^2 - 2\left(m+2\right)\sqrt{m^2-4} + m^2 - 4 + \left(m+2\right)^2 + 2\left(m+2\right)\sqrt{m^2-4} + m^2 - 4 = 12,$$

$$2\left(m+2\right)^2 + 2m^2 - 8 = 12,$$

$$\left(m^2+4m+4\right) + m^2 - 10 = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0,$$

$$\left(m-1\right)\left(m+3\right) = 0.$$

Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla $m = -3$ istnieją pierwiastki x_1, x_2.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu oceniania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -2\right)\cup\left(2, +\infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania $d_1^2 + d_2^2 = 6$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie odległości punktu *A* lub *B* od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ w zależności od pierwszej współrzędnej punktu:

$d_1 = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}$, $d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}$.

2 punkty zdający otrzymuje za zapisanie

- wyrażenia $d_1^2 + d_2^2$ w postaci: $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)}{2}$

albo

- równości $d_1^2 + d_2^2 = 6$, w postaci równoważnej, np.:

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 10 = 0$

albo

- równania z niewiadomą *m* w postaci:

$$\frac{\left(m+1-\sqrt{m^2-4}+1\right)^2}{2} + \frac{\left(m+1+\sqrt{m^2-4}+1\right)^2}{2} = 6.$$

3 punkty zdający otrzymuje za zapisanie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą *m*, np.: $(2m+2)^2 - 2(2m+5) + 2(2m+2) - 10 = 0$ lub

$2(m+2)^2 + 2m^2 - 8 = 12$.

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie tego równania: $m = 1$ lub $m = -3$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego: $m = -3$.

Rozwiązanie pełne *(trzeci etap)*..**6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i równania oraz podanie odpowiedzi: $m = -3$.

Uwaga
Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etapy I i II rozwiązania albo poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu równania z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże równanie z etapu II.

Zadanie 3. (0–1)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych. (II.6.e.R)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Równanie zapisujemy w postaci równoważnej

$$\sqrt{3}\cdot\cos x-\sin x = 1.$$

Dzieląc obie strony równania przez 2 otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x=\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=\frac{1}{2}.$$

Ze wzoru na sinus różnicy dostajemy

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } \frac{\pi}{3}-x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,$$ gdzie k jest liczbą całkowitą,

czyli

$$x=\frac{\pi}{6}-2k\pi \text{ lub } x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi.$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ są tylko dwa rozwiązania tego równania: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

<u>Uwaga</u>

Równanie $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$ możemy również zapisać w postaci równoważnej

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x=\frac{1}{2},$$

a następnie zastosować wzór na cosinus sumy. Wtedy otrzymujemy

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Stąd
$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ lub } x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{, gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$
więc
$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{, gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Uwaga

Do równania elementarnego, np. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$ możemy również dojść nieco inaczej.

Zauważmy, że $\sqrt{3}=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$, czyli $\sqrt{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$. Zatem równanie $\sqrt{3}\cdot\cos x-\sin x=1$ możemy zapisać w postaci równoważnej
$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x-\sin x=1,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np.: $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$ lub

$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$ lub $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x-\sin x=1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej: $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$ lub $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający rozwiąże równanie w zbiorze *R*:

$x=\frac{\pi}{6}-2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$, to otrzymuje 3 **punkty**.

II sposób rozwiązania

Ponieważ prawa strona równania $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$ jest nieujemna, więc równanie ma rozwiązania tylko wtedy, gdy $\cos x \ge 0$. Wówczas podnosząc obie strony równania do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne

$$3\cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x .$$

Stąd i z „jedynki trygonometrycznej" otrzymujemy

$$3\left(1-\sin^2 x\right) = 1+2\sin x+\sin^2 x ,$$

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0 ,$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 .$$

Podstawiając $t = \sin x$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2t^2 + t - 1 = 0 ,$$

$$\left(t+1\right)\left(2t-1\right) = 0 .$$

Stąd

$$t = -1 \text{ lub } t = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\sin x = -1 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2} .$$

Rozwiązaniem pierwszego z tych równań jest każda liczba $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Rozwiązaniem drugiego jest każda liczba $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Ponieważ dla każdego k jest liczbą całkowitą mamy $\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) < 0$, więc żadna z liczb $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ nie jest rozwiązaniem naszego równania. Spośród pozostałych rozwiązań, w przedziale $\left\langle 0, 2\pi\right\rangle$ znajdują się tylko dwie takie liczby: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

<u>Uwaga</u>

Zamiast przekształcać równanie $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$ w sposób równoważny do układu równania $3\cos^2 x = 1+2\sin x+\sin^2 x$ i nierówności $\cos x \ge 0$ możemy wyznaczyć wszystkie liczby z przedziału $\left\langle 0, 2\pi\right\rangle$, spełniające równanie $3\cos^2 x = 1+2\sin x+\sin^2 x$, a więc liczby $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$, a następnie sprawdzić, które z nich spełniają równanie $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$. Wówczas dla $x = \frac{\pi}{6}$ lewa strona równania jest równa $\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, a prawa $1+\sin\frac{\pi}{6} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, więc liczba $x = \frac{\pi}{6}$ jest rozwiązaniem równania $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$. Dla $x = \frac{5}{6}\pi$ lewa strona równania jest równa $\sqrt{3}\cdot\cos\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, a prawa $1+\sin\frac{5}{6}\pi = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, więc liczba $x = \frac{5}{6}\pi$ nie jest rozwiązaniem równania $\sqrt{3}\cdot\cos x = 1+\sin x$. Dla $x=\frac{3}{2}\pi$ lewa strona równania $\sqrt{3}\cdot\cos\frac{3}{2}\pi=\sqrt{3}\cdot 0=0$, a prawa $1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1-1=0$, więc liczba $x=\frac{3}{2}\pi$ jest rozwiązaniem równania.

W przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ znajdują się dwa rozwiązania: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający zapisze założenie $\cos x \geq 0$, a następnie zapisze równanie w postaci równoważnej, np.: $2\sin^2 x+\sin x-1=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze alternatywę równań: $\sin x=-1$ lub $\sin x=\frac{1}{2}$.

<u>**Uwaga**</u>

Wystarczy, że zdający zapisze $t=-1$ lub $t=\frac{1}{2}$, jeśli wykonał podstawienie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający rozwiąże równania $\sin x=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}$ w zbiorze *R*:

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań spośród $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$, to otrzymuje 3 **punkty**.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>

Dopisując do równania $\sqrt{3}\cdot\cos x-\sin x=1$ „jedynkę trygonometryczną” otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cdot\cos x-\sin x=1\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$$

z niewiadomymi $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązując ten układ dostajemy kolejno:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cdot\cos x - 1 \\ \left(\sqrt{3}\cdot\cos x - 1\right)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cdot\cos x - 1 \\ 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cdot\cos x - 1 \\ 4\cos x\left(\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cdot\cos x - 1 \\ \cos x = 0 \ \text{ lub } \ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \ \text{lub} \ \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymane równania elementarne mamy

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \ \text{lub} \ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Stąd

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ znajdują się dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze układ równań, w którym jedno z równań zawiera tylko jedną niewiadomą $\cos x$ lub $\sin x$, np.:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cdot\cos x - 1 \\ \left(\sqrt{3}\cdot\cos x - 1\right)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze alternatywę elementarnych równań trygonometrycznych wynikających z otrzymanego układu, np.:

$\cos x = 0$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

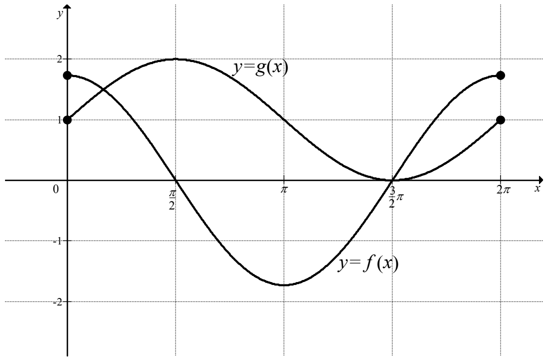
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający rozwiąże otrzymane równania w zbiorze *R*:
$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$, to otrzymuje 3 **punkty**.

IV sposób rozwiązania
Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=\sqrt{3}\cos x$ oraz $g(x)=\sin x+1$ określonych w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.



W przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ funkcja *f* jest malejąca, a jej wartości maleją od $\sqrt{3}$ do 0, natomiast funkcja *g* jest w tym przedziale rosnąca, a jej wartości rosną od 1 do 2. Zatem równanie $f(x)=g(x)$ ma w tym przedziale jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest $x=\frac{\pi}{6}$, gdyż $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{2}$ oraz $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. Drugim rozwiązaniem równania $f(x)=g(x)$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest $x=\frac{3}{2}\pi$. Jest to wspólne miejsce zerowe funkcji *f* i *g*.
Zatem w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ znajdują się dwa rozwiązania równania: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający rozważy dwie funkcje: $f(x)=\sqrt{3}\cos x$ oraz $g(x)=\sin x+1$ i narysuje wykres jednej z nich.
Uwaga

Zdający może rozważać funkcje określone na dowolnym zbiorze zawierającym przedział $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający rozważy dwie funkcje: $f(x) = \sqrt{3}\cos x$ oraz $g(x) = \sin x + 1$ i narysuje w jednym układzie współrzędnych wykresu obu tych funkcji.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający poda rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$, ale nie sprawdzi, że $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ i uzasadni, że są to wszystkie rozwiązania równania w tym przedziale, np. wykona sprawdzenie $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający poda tylko jedno poprawne rozwiązanie równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$ albo $x = \frac{3}{2}\pi$ i wykona odpowiednie sprawdzenie**, to otrzymuje** 3 punkty**.**

Zadanie 4. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu twierdzenia związanego z działaniami na wyrażeniach wymiernych: dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem wyrażeń wymiernych, skracaniem, rozszerzaniem wyrażeń wymiernych. (V.2.f)

<u>Rozwiązanie I sposób</u>

Przekształcając nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$ w sposób równoważny otrzymujemy

$$(x+1)x^2 + (y+1)y^2 > 2xy,$$
$$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 > 0,$$
$$(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x-y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych, natomiast $x^3 > 0$ i $y^3 > 0$, gdyż liczby x i y są dodatnie. To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej: $(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....3 pkt
gdy uzasadni prawdziwość nierówności $(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0$, np. stwierdzi, że $(x-y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych oraz $x^3 > 0$ i $y^3 > 0$ dla liczb dodatnich x i y.

Rozwiązanie II sposób
Ponieważ $x > 0$ i $y > 0$, więc $x+1 > 1$ i $y+1 > 1$. Stąd wynika, że

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 1 \cdot \frac{x}{y} + 1 \cdot \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Suma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2, czyli $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. W rezultacie $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$, co kończy dowód.

Uwaga
Nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej: $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$. Stąd $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy zapisze, że $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....3 pkt
gdy uzasadni prawdziwość nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, np. stwierdzi, że suma liczby dodatniej i jej odwrotności jest zawsze co najmniej równa 2 lub wykorzysta nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną.

Rozwiązanie III sposób

Przekształcając nierówność $\left(x+1\right)\frac{x}{y}+\left(y+1\right)\frac{y}{x}>2$ w sposób równoważny otrzymujemy

$$\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{y}{x}>2,$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}>2.$$

Suma $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2,

natomiast suma $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ jest dodatnia, gdyż jest sumą dwóch dodatnich składników. Zatem

nierówność $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}>2$ jest prawdziwa. To kończy dowód.

Uwaga

Nierówność $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej

i geometrycznej: $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=1$. Stąd $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej: $\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{y}{x}>2$

i w dalszym rozumowaniu dąży do wykazania, że suma $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ jest nie mniejsza niż 2, ale

popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt

gdy uzasadni prawdziwość nierówności $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}>2$, np. stwierdzi, że $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, co wynika z twierdzenia o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności oraz $\frac{x^2}{y}>0$ i $\frac{y^2}{x}>0$ dla liczb rzeczywistych dodatnich x i y.

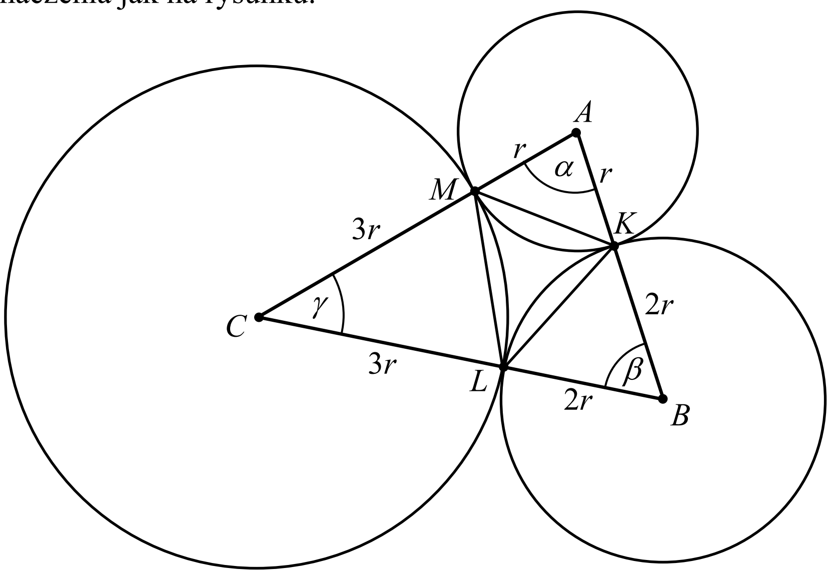
Zadanie 5. (0–5)

Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio r, $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K, drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M. Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym. (III.7.c)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta AMK jest równe

$$P_{AMK}=\frac{1}{2}|AM|\cdot|AK|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha,$$

pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot4r\cdot3r\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot12r^2\cdot\sin\alpha.$$

Zatem

$$\frac{P_{AMK}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot12r^2\cdot\sin\alpha}=\frac{1}{12}.$$

Podobnie, pole trójkąta BKL jest równe

$$P_{BKL}=\frac{1}{2}|BK|\cdot|BL|\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(2r)^2\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot4r^2\cdot\sin\beta,$$

natomiast pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|BA|\cdot|BC|\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot3r\cdot5r\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot15r^2\cdot\sin\beta,$$

więc

$$\frac{P_{BKL}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4r^2\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}\cdot 15r^2\cdot\sin\beta}=\frac{4}{15}.$$

Pole trójkąta *CLM* jest równe

$$P_{CLM}=\frac{1}{2}|CM|\cdot|CL|\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}(3r)^2\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 9r^2\cdot\sin\gamma,$$

natomiast pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|CA|\cdot|CB|\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 5r\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 20r^2\cdot\sin\gamma,$$

Zatem

$$\frac{P_{CLM}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9r^2\cdot\sin\gamma}{\frac{1}{2}\cdot 20r^2\cdot\sin\gamma}=\frac{9}{20}.$$

Pole trójkąta *KLM* jest więc równe

$$P_{KLM}=P_{ABC}-P_{AMK}-P_{BKL}-P_{CLM}=P_{ABC}-\frac{1}{12}P_{ABC}-\frac{4}{15}P_{ABC}-\frac{9}{20}P_{ABC}=\frac{1}{5}P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{1}{5}.$$

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający wyrazi pole trójkąta *KLM* jako różnicę pól odpowiednich trójkątów:
$P_{KLM}=P_{ABC}-P_{AMK}-P_{BKL}-P_{CLM}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający wyrazi pole co najmniej jednego z trójkątów *AMK*, *BKL* lub *CLM* w zależności od r i sinusa odpowiedniego kąta trójkąta *ABC*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający wyznaczy pole co najmniej jednego z trójkątów *AMK*, *BKL* lub *CLM* w zależności od pola trójkąta *ABC*, np.: $P_{AMK}=\frac{1}{12}P_{ABC}$, $P_{BKL}=\frac{4}{15}P_{ABC}$, $P_{CLM}=\frac{9}{20}P_{ABC}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 4 pkt
Zdający

- wyznaczy pole każdego z trójkątów *AMK*, *BKL* lub *CLM* w zależności od pola trójkąta *ABC*, np.: $P_{AMK}=\frac{1}{12}P_{ABC}$, $P_{BKL}=\frac{4}{15}P_{ABC}$, $P_{CLM}=\frac{9}{20}P_{ABC}$ i na tym poprzestanie

albo

- obliczy stosunek pola trójkąta *KLM* do pola trójkąta *ABC*, popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pola trójkąta *KLM* do pola trójkąta *ABC*: $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{1}{5}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Długości boków trójkąta *ABC* są równe $|AB|=3r$, $|AC|=4r$ i $|BC|=5r$. Ponieważ

$$|AB|^2+|AC|^2=(3r)^2+(4r)^2=9r^2+16r^2=25r^2=(5r)^2=|BC|^2,$$

więc trójkąt *ABC* jest prostokątny. Zatem

$$\sin\beta=\frac{4r}{5r}=\frac{4}{5},\ \sin\gamma=\frac{3r}{5r}=\frac{3}{5}\ \text{ oraz }\ P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 4r=6r^2.$$

Pole trójkąta prostokątnego *AMK* jest równe

$$P_{AMK}=\frac{1}{2}|AM|\cdot|AK|=\frac{1}{2}r^2.$$

Pole trójkąta *BKL* jest równe

$$P_{BKL}=\frac{1}{2}|BK|\cdot|BL|\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(2r)^2\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 4r^2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}r^2,$$

a pole trójkąta *CLM* jest równe

$$P_{CLM}=\frac{1}{2}|CM|\cdot|CL|\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}(3r)^2\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 9r^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{10}r^2.$$

Pole trójkąta *KLM* jest więc równe

$$P_{KLM}=P_{ABC}-P_{AMK}-P_{BKL}-P_{CLM}=6r^2-\frac{1}{2}r^2-\frac{8}{5}r^2-\frac{27}{10}r^2=\frac{1}{5}P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{1}{5}.$$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąt *ABC* jest prostokątny

albo

- wyrazi pole trójkąta *KLM* jako różnicę pól odpowiednich trójkątów: $P_{KLM}=P_{ABC}-P_{AMK}-P_{BKL}-P_{CLM}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- obliczy sinusy kątów ostrych trójkąta *ABC*: $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $\sin\gamma=\frac{3}{5}$

albo

- wyznaczy pole trójkąta *ABC* w zależności od *r*: $P_{ABC}=6r^2$

albo

- wyznaczy pole trójkąta *AMK* w zależności od *r*: $P_{AMK}=\frac{1}{2}r^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC i pole jednego z trójkątów AMK, BKL, CLM
w zależności od r: $P_{ABC}=6r^2$, $P_{AMK}=\frac{1}{2}r^2$, $P_{BKL}=\frac{8}{5}r^2$, $P_{CLM}=\frac{27}{10}r^2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Zdający
- wyznaczy pole każdego z trójkątów ABC, AMK, BKL lub CLM w zależności od r i na tym poprzestanie

albo
- obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC, popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Zdający obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC: $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{1}{5}$.

<u>III sposób rozwiązania</u>
Niech

$$|AB|=3r,\ |BC|=5r,\ |CA|=4r$$

$$|AK|=|AM|=r,\ |BK|=|BL|=2r,\ |CL|=|CM|=3r$$

Zauważamy, że $|\sphericalangle BAC|=90^\circ$, ponieważ $(3r)^2+(4r)^2=(5r)^2$, zatem

$$|KM|=\sqrt{r^2+r^2}=r\sqrt{2}.$$

$$\cos|\sphericalangle CBA|=\frac{3r}{5r}=\frac{3}{5},\qquad \cos|\sphericalangle ACB|=\frac{4r}{5r}=\frac{4}{5}$$

Zatem z twierdzenia kosinusów mamy

$$|KL|=\sqrt{4r^2+4r^2-2\cdot 2r\cdot 2r\cdot\frac{3}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}r$$

$$|LM|=\sqrt{9r^2+9r^2-2\cdot 3r\cdot 3r\cdot\frac{4}{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}r$$

Obliczamy $\cos\sphericalangle KLM$:

$$2r^2=|KM|^2=|ML|^2+|KL|^2-2\cdot|ML|\cdot|KL|\cdot\cos|\sphericalangle KLM|=$$

$$=\frac{18r^2}{5}+\frac{16r^2}{5}-\frac{24\sqrt{50}}{25}r^2\cdot\cos|\sphericalangle KLM|=\frac{34}{5}r^2-\frac{24\sqrt{2}}{5}r^2\cdot\cos|\sphericalangle KLM|.$$

Zatem

$$\cos|\sphericalangle KLM|=\frac{\frac{34}{5}-2}{24\frac{\sqrt{2}}{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{ więc }\sin|\sphericalangle KLM|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wobec tego

$$P_{\Delta KLM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot r\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6r^2}{5}.$$

Ponieważ

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 4r=6r^2,$$

więc otrzymujemy $\frac{P_{\Delta KLM}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{1}{5}$.

<u>Uwaga</u>

Można obliczyć miarę kąta KLM

$$|\sphericalangle KLM|=180^\circ-\frac{1}{2}\left(180^\circ-|\sphericalangle ABC|\right)-\frac{1}{2}\left(180^\circ-|\sphericalangle ACB|\right)=\frac{1}{2}\left(|\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle ACB|\right)=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$$

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyznaczy jeden z boków trójkąta *KLM.*

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający wyznaczy trzy boki trójkąta *KLM.*

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy kosinus jednego z kątów trójkąta *KLM*, np. $\cos|\sphericalangle KLM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający wyznaczy sinus jednego z kątów trójkąta *KLM*, np. $\sin|\sphericalangle KLM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pól trójkątów *KLM* i *ABC*: $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{1}{5}$.

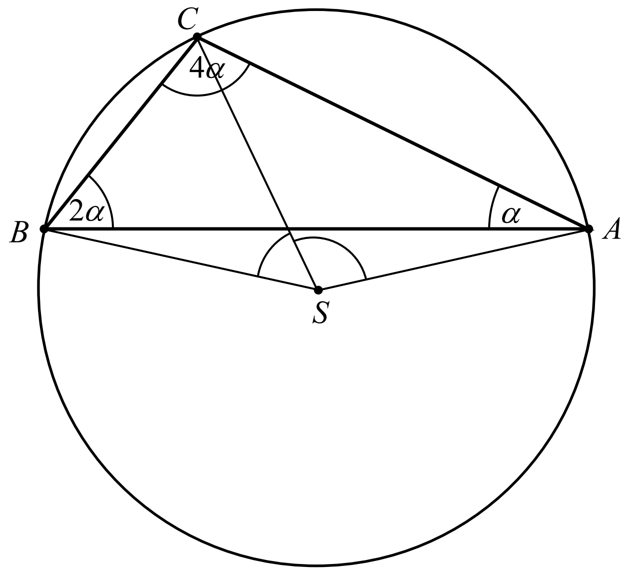
Zadanie 6. (0–3)

Trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg o środku *S*. Kąty wewnętrzne *CAB*, *ABC* i *BCA* tego trójkąta są równe odpowiednio α, 2α i 4α. Wykaż, że trójkąt *ABC* jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych *ASB*, *ASC* i *BSC* tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Korzystanie ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (V.5.b, 7.a)

<u>Rozwiązanie</u>

Suma kątów trójkąta jest równa $180°$. Zatem $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180°$, więc $7\alpha = 180°$. Stąd $\alpha = \left(25\tfrac{5}{7}\right)°$ oraz $4\alpha = \left(102\tfrac{6}{7}\right)° > 90°$. To oznacza, że trójkąt *ABC* jest rozwartokątny.



Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym wynika, że

$$|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC| = 2\alpha \text{ oraz } |\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2\cdot 2\alpha = 4\alpha .$$

Ponadto, wypukły kąt środkowy *ASB* ma miarę równą

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| + |\sphericalangle ASC| = 6\alpha .$$

Ciąg $(6\alpha, 4\alpha, 2\alpha)$ jest arytmetyczny, a jego różnica jest równa (-2α). To kończy dowód.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje.. 1 pkt

gdy obliczy miarę kąta *CAB*: $\alpha = \frac{1}{7}\cdot 180° = \left(25\tfrac{5}{7}\right)°$ i uzasadni, że trójkąt *ABC* jest rozwartokątny.

Uwaga
Zdający nie musi obliczać miary kąta CAB. Wystarczy, że zapisze
$4\alpha = \frac{4}{7}\cdot 180° > \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.

Zdający otrzymuje ....**2 pkt**
gdy rozważy poprawnie wpisany w okrąg trójkąt ABC i wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym do wyznaczenia miary kątów środkowych ASC i BSC w zależności od α : $|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$ oraz $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$.

Zdający otrzymuje ....**3 pkt**
gdy wyznaczy miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC i stwierdzi, że tworzą one w podanej kolejności ciąg arytmetyczny: $|\sphericalangle ASB| = 6\alpha$,$|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$, $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$.

Uwaga
Jeżeli zdający nie uzasadni, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, a udowodni, że miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (0–6)
Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Stosowanie wzorów na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. (II.5.b, c)

Rozwiązanie
Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i suma wszystkich jego wyrazów o numerach nieparzystych jest 100 razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych, więc ciąg ten nie jest stały.
Zauważmy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych również jest geometryczny, a jego iloraz jest równy q^2, gdzie q oznacza iloraz ciągu (a_n). Tak samo ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych jest geometryczny i jego iloraz również jest równy q^2. Każdy z tych ciągów ma po 50 wyrazów. Ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$a_1 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} = 100a_2 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} .$$

Stąd mamy $a_1 = 100a_2$, czyli $a_1 = 100a_1q$. Zatem $q = \frac{1}{100}$, gdyż $a_1 > 0$.

Ponieważ

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100,$$

więc z własności logarytmów otrzymujemy

$$\log\left(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100}\right) = 100.$$

Z definicji logarytmu otrzymujemy więc

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 10^{100}.$$

Stąd i ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego dostajemy równanie z niewiadomą a_1

$$a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1+2+3+\ldots+99} = 10^{100}.$$

Ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1+99}{2}\cdot 99} = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100\cdot\frac{99}{2}} = 10^{100},$$

Stąd

$$a_1 = \frac{10}{\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{99}{2}}} = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100}.$$

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zauważy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych jest geometryczny oraz ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych jest geometryczny, a iloraz każdego z tych ciągów jest taki sam

albo

- zapisze równość $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{99} = 100\left(a_1 q + a_3 q + a_5 q + \ldots + a_{99} q\right)$

albo

- wykorzysta wzór na sumę logarytmów i definicję logarytmu oraz zapisze równość $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100$ w postaci: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 10^{100}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomymi a_1 i q: $a_1 \cdot \dfrac{1-\left(q^2\right)^{50}}{1-q^2} = 100 a_2 \cdot \dfrac{1-\left(q^2\right)^{50}}{1-q^2}$

albo

- zapisze równość $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{99} = 100q\left(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{99}\right)$

albo

- zapisze równość $a_1 \cdot \left(a_1 \cdot q\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 \cdot q^{99}\right) = 10^{100}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...4 pkt
Zdający zapisze równanie z niewiadomą a_1, np.:

- $$a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100}$$

albo

- zapisze zależności $a_1^{100} q^{4950} = 10^{100}$ i $q = \dfrac{1}{100}$.

<u>**Uwaga**</u>
Jeżeli zdający obliczy iloraz ciągu geometrycznego: $q = \dfrac{1}{100}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci $a_1^{100} \cdot \left(\dfrac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt
Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 10^{100}$.

Zadanie 8. (0–4)

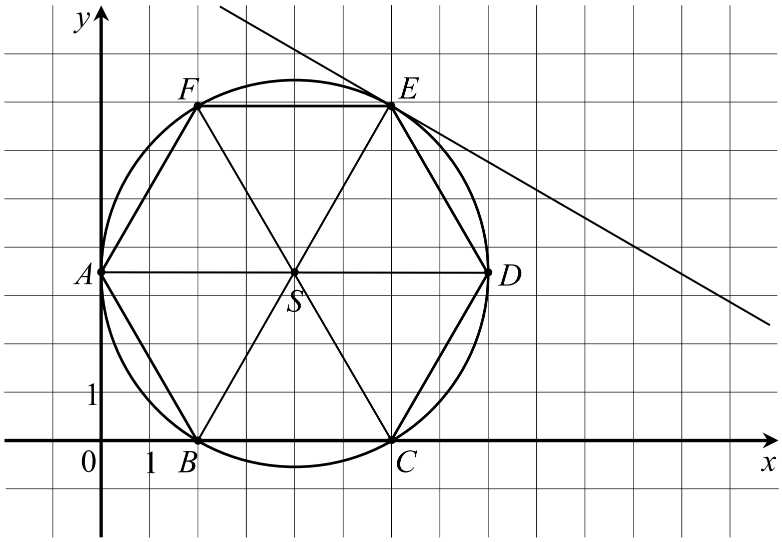
Punkty *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = \left(0,\ 2\sqrt{3}\right)$, $B = \left(2,\ 0\right)$, a *C* leży na osi *Ox*. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek *E*.

Obszar standardów	**Opis wymagań**
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań dotyczących wzajemnego położenia prostej i okręgu. (IV.8.b.R)

<u>**Rozwiązanie**</u>
Obliczmy długość boku sześciokąta

$$\left|AB\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4.$$

Ponieważ wierzchołek *C* tego sześciokąta leży na osi *Ox*, więc $C = \left(6,0\right)$.



Środek S okręgu opisanego na tym sześciokącie ma zatem współrzędne $S=\left(4,2\sqrt{3}\right)$.

Punkt S jest środkiem przekątnej BE sześciokąta, więc

$$S=\left(\frac{x_B+x_E}{2},\frac{y_B+y_E}{2}\right)=\left(\frac{2+x_E}{2},\frac{0+y_E}{2}\right).$$

Zatem

$$\frac{2+x_E}{2}=4 \text{ i } \frac{y_E}{2}=2\sqrt{3}.$$

Stąd $x_E=6$ i $y_E=4\sqrt{3}$, więc $E=\left(6,4\sqrt{3}\right)$.

Styczna do okręgu opisanego na sześciokącie foremnym $ABCDEF$ poprowadzona przez wierzchołek E tego sześciokąta jest prostopadła do prostej BE. Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej BE jest równy

$$\frac{y_E-y_B}{x_E-x_B}=\frac{4\sqrt{3}-0}{6-2}=\sqrt{3},$$

więc współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Zatem styczna ma równanie

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-6\right)+4\sqrt{3},$$

czyli

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+6\sqrt{3}.$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze długość boku sześciokąta $ABCDEF$: $|AB|=4$

albo

- zapisze współrzędne środka S okręgu opisanego na sześciokącie: $S=\left(4,2\sqrt{3}\right)$

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej BE: $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający
- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej BE: $\sqrt{3}$ i obliczy lub poda współrzędne wierzchołka E: $E=\left(6,4\sqrt{3}\right)$

albo
- zapisze, że prosta AC jest równoległa do stycznej

albo
- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej AC: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

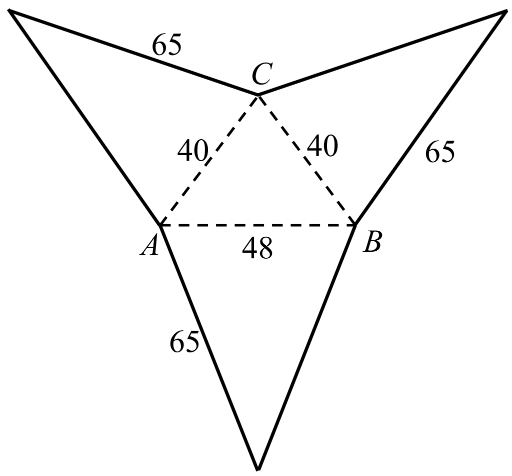
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

__**Uwaga**__
Jeśli zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej, ale nie obliczy współrzędnych punktu E, to otrzymuje **2 punkty.**

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający zapisze równanie stycznej: $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+6\sqrt{3}$ lub $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-6\right)+4\sqrt{3}$.

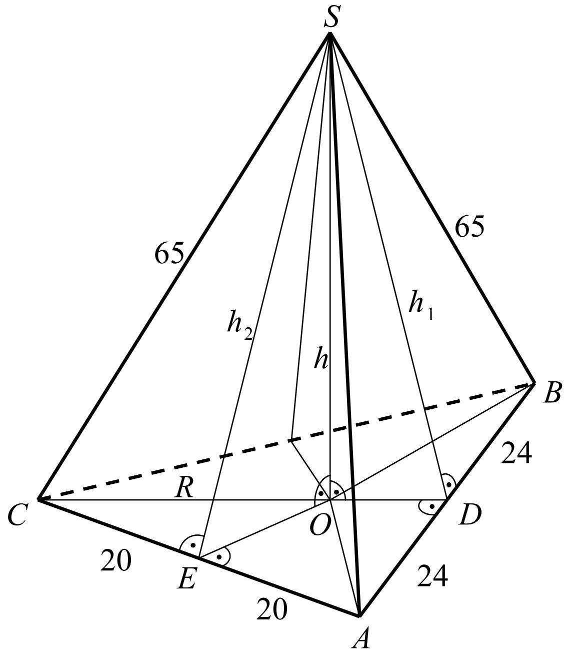
Zadanie 9. (0–6)

Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatka została przedstawiona na rysunku.



Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii. (III.9.b)

__**I sposób rozwiązania**__
Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC. Wówczas każda z krawędzi bocznych AS, BS i CS ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają tę samą długość, więc spodek *O* wysokości *SO* ostrosłupa jest punktem przecięcia symetralnych boków jest podstawy, a więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.
Obliczmy promień *R* tego okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADC* otrzymujemy

$$|AD|^2+|DC|^2=|AC|^2, \text{ czyli } 24^2+|DC|^2=40^2.$$

Stąd

$$|DC|=\sqrt{40^2-24^2}=32.$$

Trójkąty *OEC* i *ADC* są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *C*), więc

$$\frac{|OC|}{|CE|}=\frac{|AC|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{R}{20}=\frac{40}{32}.$$

Stąd $R=25$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *COS* otrzymujemy

$$|OC|^2+|SO|^2=|CS|^2, \text{ czyli } 25^2+h^2=65^2.$$

Stąd

$$h=\sqrt{65^2-25^2}=60.$$

Pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot 32=768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}P_{ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 768\cdot 60=15360.$$

Uwaga
Pole trójkąta *ABC* możemy obliczyć stosując wzór Herona

$$P_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{64\cdot 24\cdot 24\cdot 16}=8\cdot 24\cdot 4=768.$$

Promień *R* okręgu opisanego na trójkącie *ABC* możemy obliczyć wykorzystując wzór

$$P_{ABC}=\frac{abc}{4R}.$$

Stąd

$$R=\frac{abc}{4P_{ABC}}=\frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot 768}=25.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta *ABC*, np. $|DC|=32$ albo obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający
- obliczy pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC}=768$

albo
- obliczy wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną z wierzchołka *C* oraz zapisze, że spodek *O* wysokości *SO* ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.
  Uwaga
  Wystarczy, że zdający oblicza promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający zapisze równanie pozwalające obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*, np.: $768=\frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot R}$ lub $\frac{R}{20}=\frac{40}{32}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt
Zdający
- obliczy wysokość ostrosłupa i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h=60$

albo
- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo
- pominie we wzorze na objętość współczynnik $\frac{1}{3}$ i otrzyma: $V_{ABCS}=46080$

albo
- pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$ i otrzyma: $P_{ABC}=1536$, $V_{ABCS}=30720$.

Uwaga
Jeżeli zdający obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*: $R=25$ oraz zapisze równanie pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa, np.: $25^2+h^2=65^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**.

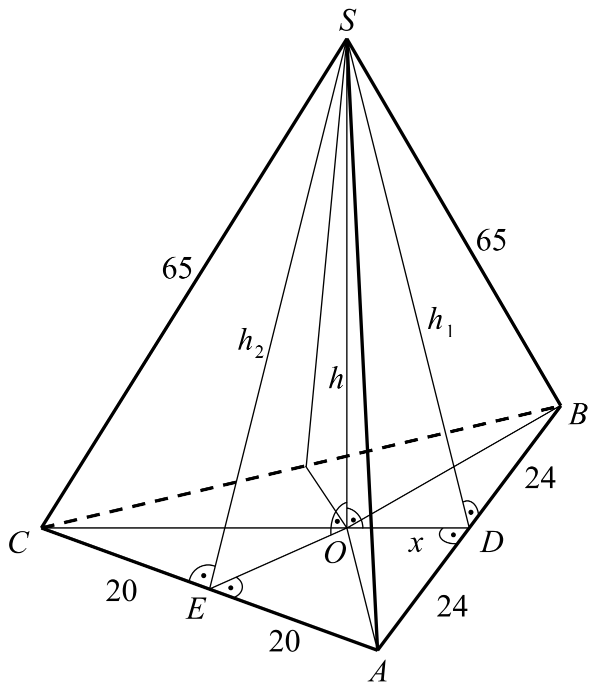
Rozwiązanie pełne .... 6 pkt
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V_{ABCS}=15360$.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik $\frac{1}{3}$ i pominie współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe zadanie.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC. Wówczas każda z krawędzi bocznych AS, BS i CS ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ krawędzie podstawy AC i BC mają równe długości i krawędzie boczne AS i BS mają równe długości, więc spodek O wysokości SO ostrosłupa leży na symetralnej CD odcinka AB. Odcinek CD jest również wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy

$$|AD|^2+|DC|^2=|AC|^2, \text{ czyli } 24^2+|DC|^2=40^2.$$

Stąd

$$|DC|=\sqrt{40^2-24^2}=32.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADS otrzymujemy

$$|AD|^2+|DS|^2=|AS|^2, \text{ czyli } 24^2+h_1^2=65^2.$$

Stąd

$$h_1=\sqrt{65^2-24^2}=\sqrt{3649}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów DOS i COS otrzymujemy

$$|DO|^2+|SO|^2=|SD|^2 \text{ oraz } |OC|^2+|SO|^2=|CS|^2,$$

czyli

$$x^2+h^2=3649 \text{ oraz } (32-x)^2+h^2=65^2.$$

$$x^2+h^2=3649 \text{ oraz } 32^2-64x+x^2+h^2=65^2.$$

Stąd

$$32^2 - 64x + 3649 = 65^2,$$
$$x = 7,$$

więc

$$h = \sqrt{3649 - 7^2} = 60.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

Uwaga

Możemy też przyjąć, że podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt ABS i wówczas wysokość ostrosłupa będzie odcinkiem CM, gdzie punkt M leży na wysokości SD tej podstawy. Tak jak w II sposobie rozwiązania obliczamy $|CD| = 32$ oraz $|SD| = \sqrt{3649}$. Oznaczając $|MD| = y$ oraz $|CM| = h_3$, a następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta MDC i trójkąta ASM otrzymujemy

$$|MD|^2 + |CM|^2 = |CD|^2 \text{ oraz } |SM|^2 + |CM|^2 = |CS|^2,$$

czyli

$$y^2 + h_3^2 = 32^2 \text{ oraz } \left(\sqrt{3649} - y\right)^2 + h_3^2 = 65^2,$$
$$y^2 + h_3^2 = 1024 \text{ oraz } 3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + y^2 + h_3^2 = 4225,$$

Stąd

$$3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + 1024 = 4225,$$
$$y = \frac{224}{\sqrt{3649}}.$$

Zatem $h_3 = \sqrt{1024 - y^2} = \sqrt{1024 - \left(\frac{224}{\sqrt{3649}}\right)^2} = \sqrt{1024 - \frac{50176}{3649}} = \frac{1920}{\sqrt{3649}}$.

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \sqrt{3649} = 24\sqrt{3649}.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABSC} = \frac{1}{3} P_{ABS} \cdot h_3 = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3649} \cdot \frac{1920}{\sqrt{3649}} = 15360.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta ABC, np. $|DC| = 32$ albo obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający

- obliczy pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC}=768$

albo

- obliczy wysokość trójkąta *ABS* opuszczoną z wierzchołka *S* oraz wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną z wierzchołka *C*: $|SD|=\sqrt{3649}$, $|DC|=32$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę *ABC* z wierzchołka *S*: $x^2+h^2=3649$ i $(32-x)^2+h^2=65^2$

albo

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę *ABS* z wierzchołka *C*: $x^2+h_3^{\ 2}=32^2$ i $\left(\sqrt{3649}-x\right)^2+h_3^{\ 2}=65^2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt
Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę *ABC* z wierzchołka *S* i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h=60$

albo

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę *ABS* z wierzchołka *C* i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h_3=\dfrac{1920}{\sqrt{3649}}$

albo

- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo

- pominie we wzorze na objętość współczynnik $\dfrac{1}{3}$ i otrzyma: $V_{ABCS}=46080$

albo

- pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\dfrac{1}{2}$ i otrzyma: $P_{ABC}=1536$, $V_{ABCS}=30720$.

<u>**Uwaga**</u>
Jeżeli zdający obliczy długość odcinka *OD*: $x=7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**. Podobnie jeśli zdający obliczy długość odcinka *MD*: $y=\dfrac{224}{\sqrt{3649}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V_{ABCS}=15360$.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik $\frac{1}{3}$ i pominie współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru *m*, dla których równanie $\left(x^3+2x^2+2x+1\right)\left[x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m\right]=0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

Obszar standardów	**Opis wymagań**
Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. (III.2.c.R)

I sposób rozwiązania

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba -1, gdyż $\left(-1\right)^3+2\cdot\left(-1\right)^2+2\cdot\left(-1\right)+1=0$.

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P\left(x\right)=x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m\,.$$

Ponieważ $\Delta=\left(-\left(2m+1\right)\right)^2-4\left(m^2+m\right)=4m^2+4m+1-4m^2-4m=1$, więc tymi pierwiastkami są liczby $x_1=\frac{2m+1-1}{2}=m$, $x_2=\frac{2m+1+1}{2}=m+1$.

Wyznaczmy wszystkie wartości parametru *m*, dla których jeden z pierwiastków wielomianu $W\left(x\right)$ jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Mamy więc

$$-1=\frac{m+1+m}{2} \text{ lub } m=\frac{m+1+\left(-1\right)}{2} \text{ lub } m+1=\frac{m+\left(-1\right)}{2}.$$

Stąd $m=-\frac{3}{2}$ lub $m=0$ lub $m=-3$. Ponieważ *m* jest liczbą całkowitą, więc istnieją dwie szukane wartości parametru *m*: $m=0$ lub $m=-3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest -1 .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu $W\left(x\right)$: -1, m, $m+1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 4 pkt

Zdający

- zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru m:
  $-1=\frac{m+1+m}{2}$ lub $m=\frac{m+1+\left(-1\right)}{2}$ lub $m+1=\frac{m+\left(-1\right)}{2}$

albo

- zapisze jedno z równań i konsekwentnie obliczy wartość parametru m (w przypadku równania $-1=\frac{m+1+m}{2}$ sformułuje wniosek, że nie istnieje taka całkowita wartość parametru m)

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi, konsekwentnie formułując końcowy wniosek.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru: $m=-3,\ m=0$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru m:
$-1=\frac{m+1+m}{2}$ lub $m=\frac{m+1+\left(-1\right)}{2}$ lub $m+1=\frac{m+\left(-1\right)}{2}$, rozwiąże je i nie odrzuci $m=-\frac{3}{2}$, to otrzymuje **4 punkty**.

<u>II sposób rozwiązania</u> („wzory Viete'a”)

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba -1, gdyż
$\left(-1\right)^3+2\cdot\left(-1\right)^2+2\cdot\left(-1\right)+1=0$.

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P\left(x\right)=x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m .$$

Ponieważ $\Delta=\left(-\left(2m+1\right)\right)^2-4\left(m^2+m\right)=4m^2+4m+1-4m^2-4m=1$, więc ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2, spełniające zależności:

$$x_1+x_2=2m+1,\ x_1\cdot x_2=m^2+m .$$

Wyznaczymy teraz wszystkie wartości parametru m, dla których jeden z pierwiastków wielomianu $W\left(x\right)$ jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Zapisujemy więc równości

$$-1=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ lub } x_1=\frac{x_2-1}{2} \text{ lub } x_2=\frac{x_1-1}{2}.$$

Uwzględniając wzory Viete'a, z pierwszego równania otrzymujemy $m=-\frac{3}{2}$. Ponieważ m jest liczba całkowitą, więc to rozwiązanie odrzucamy. Z drugiego równania wyznaczamy $x_2=2x_1+1$, a następnie ze wzoru Viete'a na sumę pierwiastków otrzymujemy $x_2=\frac{2}{3}m$.

Po podstawieniu tej zależności do wzoru Viete'a na iloczyn pierwiastków otrzymujemy równanie:

$$\left(2\cdot\frac{2}{3}m+1\right)\cdot\frac{2}{3}m=m^2+m.$$

Po przekształceniach to równanie przyjmuje postać: $m^2+3m=0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: -3 oraz 0, stanowiące szukane całkowite wartości parametru.

__**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest -1

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2-(2m+1)x+m^2+m$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający zapisze równanie $\frac{x_1+x_2}{2}=-1$ i co najmniej jedno z równań $\frac{x_1-1}{2}=x_2$, $\frac{x_2-1}{2}=x_1$
oraz oba równania wynikające z wzorów Viete'a:

$$x_1+x_2=2m+1 \text{ i } x_1\cdot x_2=m^2+m.$$

__Uwaga__

Jeżeli zdający zapisze jedynie równanie $\frac{x_1+x_2}{2}=-1$, rozwiąże je, otrzymując $m=-\frac{3}{2}$,
i odrzuci ten wynik, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Zdający doprowadzi układ równań, np.

$$\begin{cases}\frac{x_1-1}{2}=x_2\\ x_1+x_2=2m+1\\ x_1\cdot x_2=m^2+m\end{cases}$$

do równania kwadratowego z niewiadomą m, np. $\frac{2}{3}m\left(\frac{4}{3}m+1\right)=m^2+m$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru: $m=-3,\ m=0$.

Zadanie 11. (0–4)

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa i stosowanie twierdzenia znanego jako *klasyczna definicja prawdopodobieństwa* do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (II.10.d)

<u>I sposób rozwiązania</u> (model klasyczny-kombinacje)

Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory $\{a,b,c\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 3\cdot 8 = 120.$$

Niech A oznacza zdarzenie - wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich zbiorów $\{a,b,c\}$, że $a > b > c$ i $a = b + c$. Liczba a może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:

$10 = 9+1 = 8+2 = 7+3 = 6+4$, więc są 4 takie podzbiory, gdzie $a = 10$,
$9 = 8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4$, więc są 4 takie podzbiory, gdzie $a = 9$,
$8 = 7+1 = 6+2 = 5+3$, więc są 3 takie podzbiory, gdzie $a = 8$,
$7 = 6+1 = 5+2 = 4+3$, więc są 3 takie podzbiory, gdzie $a = 7$,
$6 = 5+1 = 4+2$, więc są 2 takie podzbiory, gdzie $a = 6$,
$5 = 4+1 = 3+2$, więc są 2 takie podzbiory, gdzie $a = 5$,
$4 = 3+1$, więc jest 1 taki podzbiór, gdzie $a = 4$,
$3 = 2+1$, więc jest 1 taki podzbiór, gdzie $a = 3$.

W rezultacie

$$|A| = 2(4+3+2+1) = 2\cdot 10 = 20.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$

albo

- opisze zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*, np. w postaci $\{a,b,c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$.

Uwaga
Zdający może również zapisać $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający
- opisze zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a,b,c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 20$

albo
- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$ i opisze zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a,b,c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$ oraz opisze zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a,b,c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 20$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A pominie co najwyżej jeden przypadek i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zapisze podzbiór, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np. $\{10,5,5\}$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe i otrzymany wynik jest z przedziału (0,1), to otrzymuje 3 punkty. Jeżeli natomiast otrzyma wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

II sposób rozwiązania (model klasyczny-wariacje)
Niech zdarzeniem elementarnym będzie trzywyrazowy ciąg (a,b,c), którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ takie, że $a \neq b$ i $a \neq c$ i $b \neq c$. Mamy do czynienia z modelem klasycznym. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich ciągów (a,b,c), że $a > b > c$ i $a = b + c$, czyli ciągów malejących.
Liczba a może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:
$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$, więc są 4 takie ciągi, gdzie $a = 10$,
$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$, więc są 4 takie ciągi, gdzie $a = 9$,
$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$, więc są 3 takie ciągi, gdzie $a = 8$,

$7 = 6+1 = 5+2 = 4+3$, więc są 3 takie ciągi, gdzie $a = 7$,
$6 = 5+1 = 4+2$, więc są 2 takie ciągi, gdzie $a = 6$,
$5 = 4+1 = 3+2$, więc są 2 takie ciągi, gdzie $a = 5$,
$4 = 3+1$, więc jest 1 taki ciąg, gdzie $a = 4$,
$3 = 2+1$, więc jest 1 taki ciąg, gdzie $a = 3$.
Z każdego takiego ciągu malejącego można utworzyć $3! = 6$ zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A. W rezultacie

$$|A| = 3!\cdot 2\left(4+3+2+1\right) = 6\cdot 20 = 120.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

__Schemat oceniania II sposobu rozwiązania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający
- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10\cdot 9\cdot 8$

albo
- opisze zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A, np. w postaci (a,b,c), gdzie $a = b+c$ lub $b = a+c$ lub $c = a+b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający
- opisze zdarzenia sprzyjające np. w postaci (a,b,c), gdzie $a = b+c$ lub $b = a+c$ lub $c = a+b$ oraz obliczy liczbę ciągów (a,b,c), gdzie $a > b > c$ i $a = b+c$ (albo $a < b < c$ i $a+b = c$): 49

albo
- opisze zdarzenia sprzyjające np. w postaci (a,b,c), gdzie $a = b+c$ lub $b = a+c$ lub $c = a+b$ oraz obliczy liczbę ciągów (a,b,c) w jednej z tych sytuacji, np. w sytuacji, gdy $a = b+c$

albo
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10\cdot 9\cdot 8$ i opisze zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A, np. w postaci (a,b,c), gdzie $a = b+c$ lub $b = a+c$ lub $c = a+b$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
- Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10\cdot 9\cdot 8$ oraz opisze zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A, np. w postaci (a,b,c), gdzie $a = b+c$ lub $b = a+c$ lub $c = a+b$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 6\cdot 20$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{6}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci (a,b,c), gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ (albo $a < b < c$ i $a + b = c$), pominie co najwyżej jedno i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci (a,b,c), gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ (albo $a < b < c$ i $a + b = c$) zapisze ciąg, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np. $(10,5,5)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe, jednak otrzymany wynik jest z przedziału (0,1), to otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli natomiast otrzyma wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.
4. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.