Osiągnięcia maturzystów w roku 2007

SPRAWOZDANIE Z EGZAMINU MATURALNEGO 2007

Komentarz do zadań z matematyki

WARSZAWA, CZERWIEC 2007

Opracowanie

Barbara Andrzejewska

Jadwiga Uss

Współpraca

Henryk Dąbrowski

Mieczysław Fałat

Halina Kałek

Piotr Ludwikowski

Edyta Marczewska

Marian Pacholak

Maria Pająk-Majewska

Agata Siwik

Konsultacja naukowa

dr Edward Stachowski

WSTĘP

Egzamin maturalny z matematyki odbył się w całym kraju 14 maja 2007 r. i miał formę pisemną. Maturzyści mogli wybrać matematykę jako przedmiot obowiązkowy lub dodatkowy.

Matematyka jako przedmiot **obowiązkowy** mogła być zdawana na poziomie podstawowym lub rozszerzonym, a jako przedmiot dodatkowy – na poziomie rozszerzonym.

Egzamin na poziomie **podstawowym** trwał 120 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych sprawdzających rozumienie pojęć i umiejętność ich zastosowania w życiu codziennym oraz zadań o charakterze problemowym. Zadania egzaminacyjne obejmowały zakres wymagań dla poziomu podstawowego.

Egzamin na poziomie **rozszerzonym** trwał 180 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych wymagających rozwiązania problemów matematycznych. Zadania egzaminacyjne obejmowały zakres wymagań dla poziomu rozszerzonego.

Warunkiem zdania egzaminu było uzyskanie co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia na poziomie podstawowym lub na poziomie rozszerzonym.

Zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot **dodatkowy**, zdawali egzamin na poziomie rozszerzonym, rozwiązując ten sam arkusz, co absolwenci zdający przedmiot obowiązkowy.

Na świadectwie wyniki egzaminu zarówno obowiązkowego, jak i dodatkowego zostały zapisane w skali procentowej.

OPIS ARKUSZY EGZAMINACYJNYCH

Zadania zawarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzały wiadomości i umiejętności określone w 3 obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:
I. Wiadomości i rozumienie
II. Korzystanie z informacji
III. Tworzenie informacji.
Zadania zawarte w arkuszach egzaminacyjnych:
1) pozwalały wykazać się znajomością i rozumieniem podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz umiejętnością ich stosowania podczas rozwiązywania problemów matematycznych,
2) sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania tekstów matematycznych, sprawność rozwiązywania zadań, oraz przetwarzania informacji pochodzących z różnych źródeł, takich jak tabele, schematy, wykresy,
3) sprawdzały umiejętność analizowania i rozwiązywania problemów, argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego, podawania opisu matematycznego danej sytuacji, dobierania algorytmów do wskazanej sytuacji problemowej i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

Arkusze egzaminacyjne zostały opracowane dla dwóch poziomów wymagań – podstawowego i rozszerzonego.
Za prawidłowe rozwiązanie zadań z arkuszy dla obu poziomów zdający mógł otrzymać po 50 punktów. W arkuszu dla poziomu rozszerzonego 30% punktów możliwych do zdobycia stanowiły zadania oparte na wiadomościach i umiejętnościach określonych dla poziomu podstawowego.

Arkusze egzaminacyjne zostały opublikowane na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej www.cke.edu.pl .
Podczas egzaminu zdający mogli korzystać z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*, kalkulatora prostego, cyrkla oraz linijki.

Arkusz dla poziomu podstawowego

Arkusz egzaminacyjny dla poziomu podstawowego zawierał 11 zadań otwartych. Zadania te badały przede wszystkim znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych oraz formułowania opisu matematycznego danej sytuacji.
Tematyka zadań egzaminacyjnych w tym arkuszu obejmowała większość treści z podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące ciągów, funkcji i ich własności, wielomianów, planimetrii i stereometrii z zastosowaniem trygonometrii oraz zadania z tzw. kontekstem praktycznym.

Opis zadań egzaminacyjnych. Sprawdzane umiejętności, typowe odpowiedzi i uwagi do rozwiązań maturzystów.

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Znajdź wzór funkcji kwadratowej $y = f(x)$, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(1, -9)$ przechodząca przez punkt o współrzędnych $(2, -8)$. Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II.2)a: • wykorzystania współrzędnych wierzchołka paraboli i punktu należącego do paraboli do zapisania funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, • wyznaczenia miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Ponadto zdający miał się wykazać umiejętnością: • sporządzenia wykresu funkcji kwadratowej – standard I.3)b.
Wskaźnik łatwości zadania 0,42 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Przeważająca część maturzystów wykorzystała wzór na postać kanoniczną funkcji kwadratowej, podstawiając do niego współrzędne wierzchołka i danego punktu. Po uzyskaniu wzoru funkcji w postaci kanonicznej zdający przekształcali go do postaci ogólnej, obliczali miejsca zerowe i szkicowali wykres. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający zapisywali układ równań z trzema niewiadomymi, wyznaczali postać ogólną funkcji, a następnie przekształcali ją do postaci kanonicznej.

Najczęściej powtarzające się błędy Nieprawidłowo zapisany wzór funkcji był wynikiem różnych błędów popełnianych przez zdających. Możemy je pogrupować następująco: • błędne podstawienie współrzędnych wierzchołka paraboli do wzoru, np. $f(x)=a(x+1)^2-9$, • błędy rachunkowe – zdający mieli kłopoty z rozwiązaniem zapisanego przez siebie układu równań z trzema niewiadomymi, przez co nie otrzymywali prawidłowych współczynników we wzorze funkcji, • źle naszkicowany wykres funkcji – maturzyści wykorzystywali tylko współrzędne wierzchołka paraboli i punktu należącego do paraboli, przez co otrzymywali wykres niedokładny (miejsca zerowe przybliżone) lub ograniczony do przedziału $\langle 0,2\rangle$. Szkicowali wykresy niezgodne z otrzymanymi obliczeniami lub treścią zadania (źle zaznaczony wierzchołek, źle skierowane ramiona, niepoprawnie zaznaczone miejsca zerowe). Pojawiały się także wykresy nieprzypominające swym kształtem paraboli, nie uwzględniające symetrii paraboli względem prostej o równaniu $x=1$, • nieprawidłowo zapisane miejsca zerowego funkcji – wielu zdających utożsamiało miejsce zerowe funkcji z punktem przecięcia wykresu z osią *Ox* i zapisywało miejsce zerowe jako parę liczb, np. $(-2,0)$, $(4,0)$.
Komentarz Przystępując do rozwiązania problemu, wielu zdających nie potrafiło poprawnie przeprowadzić analizy warunków zadania i optymalnie dobrać metody jego rozwiązania, dlatego pojawiały się, np. rozwiązania oparte na układzie równań z trzema niewiadomymi. Zaskakują liczne prace, w których brak jest związku między prowadzonymi obliczeniami a narysowanym wykresem, co świadczy o niezrozumieniu pojęć związanych z trójmianem kwadratowym. Zadanie pokazało, jak istotne i pomocne w doborze najbardziej racjonalnych metod rozwiązania problemu jest rozumienie sensu poszczególnych postaci funkcji kwadratowej. Posługiwanie się pojęciem funkcji kwadratowej i korzystanie z jej własności to podstawowe umiejętności z zakresu poziomu podstawowego. Tego typu zadania były umieszczane w arkuszach egzaminacyjnych na każdym egzaminie maturalnym i fakt, iż tak wielu zdających nie potrafiło go z powodzeniem rozwiązać jest bardzo niepokojący.

Zadanie 2. *(3 pkt)*

Wysokość prowizji, którą klient płaci w pewnym biurze maklerskim przy każdej zawieranej transakcji kupna lub sprzedaży akcji jest uzależniona od wartości transakcji. Zależność ta została przedstawiona w tabeli:

Wartość transakcji	**Wysokość prowizji**
do 500 zł	15 zł
od 500,01 zł do 3000 zł	2% wartości transakcji + 5 zł
od 3000,01 zł do 8000 zł	1,5% wartości transakcji + 20 zł
od 8000,01 zł do 15000 zł	1% wartości transakcji + 60 zł
powyżej 15000 zł	0,7% wartości transakcji + 105 zł

Klient zakupił za pośrednictwem tego biura maklerskiego 530 akcji w cenie 25 zł za jedną akcję. Po roku sprzedał wszystkie kupione akcje po 45 zł za jedną sztukę. Oblicz, ile zarobił na tych transakcjach po uwzględnieniu prowizji, które zapłacił.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane umiejętności:

- odczytywania z tabeli prostych informacji ilościowych i jakościowych – standard II.2)b,
- poprawnego wybierania modelu matematycznego i zastosowania go do rozwiązania problemu – standard II 2)a

oraz wykonywania obliczeń procentowych i obliczeń na liczbach rzeczywistych – standard I.1)d.

Wskaźnik łatwości zadania

0,69 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający poprawnie odczytywali potrzebne informacje z podanej w zadaniu tabeli, obliczali wartość transakcji kupna i sprzedaży, prowizje, które należy zapłacić w biurze maklerskim i prawidłowo zapisywali wyrażenie arytmetyczne, za pomocą którego można obliczyć zysk z transakcji.

Najczęściej powtarzające się błędy

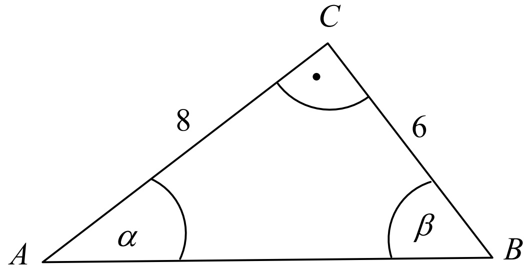
Najczęściej popełnianym przez zdających błędem było niepoprawne obliczenie wysokości prowizji biura maklerskiego (błędne odczytanie informacji z tabeli). Liczna grupa zdających, obliczając zarobek klienta, nie uwzględniała faktu, że biuro maklerskie zarabia na każdej przeprowadzanej transakcji. Prowizja biura była więc doliczana do zysku klienta. Oba rodzaje błędów wynikały z niezrozumienia treści zadania. Pojawiały się także błędy rachunkowe, a także błąd związany ze zamianą procentu na ułamek $0,7\% = 0,07$.

Komentarz

Było to typowe zadanie praktyczne z wykorzystaniem obliczeń procentowych. Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego. Mimo, iż zadania dotyczące obliczeń procentowych związanych z kredytami i lokatami są obecne w nauczaniu matematyki na poziomie gimnazjum i szkoły ponadgimnazjalnej, to wielu zdających miało problemy ze zrozumieniem pojęcia prowizji i zysku.

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia: $\mathrm{tg}^2\beta - 5\sin\beta\cdot\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.



<table>
<tr><td>

Sprawdzane umiejętności
W zadaniu były badane następujące umiejętności:

zastosowania twierdzenia Pitagorasa do rozwiązywania trójkątów – standard II.2)a,
obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – standard I.4)a,
wykonywania obliczeń na liczbach rzeczywistych – standard I.1)d.

</td></tr>
<tr><td>

Wskaźnik łatwości zadania
0,58 – umiarkowanie trudne
</td></tr>
<tr><td>

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Zdający obliczali długość przeciwprostokątnej a następnie wyznaczali wartości potrzebnych funkcji trygonometrycznych. Podstawiali wyznaczone wartości do podanego w zadaniu wyrażenia i obliczali jego wartość.
</td></tr>
<tr><td>

Najczęściej powtarzające się błędy
Wielu zdających, korzystając z przedstawionego rysunku, nie potrafiło poprawnie wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych. Mylili przeciwprostokątną z przyprostokątną, nieprawidłowo przekształcali wyrażenie zawierające pierwiastek, np. $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 1-\cos\alpha$. Zdający mieli również kłopoty z wyłączeniem wspólnego czynnika przed znak pierwiastka oraz popełniali liczne błędy rachunkowe.
</td></tr>
<tr><td>

Komentarz
Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym na podstawie ich definicji to elementarna umiejętność z zakresu trygonometrii. Mimo to wielu zdających miało problemy z prawidłowym wyznaczeniem wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β. Zaskakuje to tym bardziej, że dysponowali wybranymi wzorami matematycznymi i mogli je wykorzystać. Cieszy natomiast fakt, że większość zdających nie miała problemu z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości przeciwprostokątnej.
Były też bezbłędne prace, w których zdający wykazali się umiejętnością przekształcania wyrażeń trygonometrycznych i obliczali wartość wyrażenia, wykorzystując tylko funkcje trygonometryczne jednego kąta.
Ostatnią z ocenianych w zadaniu umiejętności była umiejętność wykonywania działań na ułamkach zwykłych. Zdający zaskakiwali brakiem sprawności w wykonywaniu podstawowych działań arytmetycznych na ułamkach i popełnianiu wielu błędów rachunkowych.
</td></tr>
</table>

Zadanie 4. *(5 pkt)*

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Sprawdzane umiejętności Zdający mieli wykazać się umiejętnościami: • zapisania w postaci równania lub układu równań zależności między prędkością i czasem – standard III.1)a oraz umiejętnościami ze standardu II.2)a: • rozwiązania równania kwadratowego i ocenienia przydatności otrzymanych wyników.
Wskaźnik łatwości zadania 0,32 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający wprowadzali oznaczenia na prędkość i czas, zapisali za pomocą równania kwadratowego zależności opisane w zadaniu. Po rozwiązaniu zadania poprawnie wybrali odpowiedź spełniającą warunki zadania.
Najczęściej powtarzające się błędy Zapisując zależność między drogą, czasem i prędkością zdający popełniali szereg błędów. Źle zinterpretowali treść zadania, co skutkowało niepoprawnie zapisanymi równaniami. Część zdających po zapisaniu układu równań nie potrafiła go przekształcić do postaci równania kwadratowego. Pojawiały się błędy w wyznaczaniu rozwiązania równania kwadratowego. Niektórzy zdający, wykonując obliczenia, nie zwracali uwagi na stosowane jednostki, dlatego pojawiły się rozwiązania, w których stosowano zamiennie zapisy $t = 30$ i $t = \frac{1}{2}$ w tym samym układzie równań.
Komentarz Zdający mieli poważne trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji problemowej. Stąd duża liczba prac, w których maturzyści zakończyli rozwiązywanie problemu na wprowadzeniu oznaczeń, nie zawsze zgodnych z warunkami zadania lub nieudanych próbach zapisania zależności między prędkością, drogą i czasem. Zastosowanie wiadomości i umiejętności matematycznych w „zadaniach praktycznych”, w których nie można wykorzystać gotowych algorytmów jest – jak widać – ogromnym problemem dla wielu zdających.

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geq 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geq 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.

a) Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).

b) Oblicz a_{2007}.

c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w standardzie III.1)a: • zastosowania własności sum częściowych ciągu arytmetycznego do zapisania wzoru na n-ty wyraz tego ciągu oraz umiejętnością opisaną w standardzie II.2)a: • wykorzystania własności ciągu arytmetycznego do wyznaczenia wyrazów ciągu określonego w treści zadania.
Wskaźnik łatwości zadania 0,23 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający wykorzystując równość $a_1 = S_1$, wyznaczali pierwszy wyraz ciągu następnie różnicę ciągu r i na tej podstawie budowali jego wzór ogólny lub do wyznaczenia wzoru ogólnego ciągu wykorzystali równanie $-n^2 + 13n = \frac{12 + a_n}{2} \cdot n$. Wartość wyrazu a_{2007} maturzyści obliczali wykorzystując wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego. Liczbę n, dla której $a_n = 0$, zdający wyznaczali, rozwiązując odpowiednie równanie.
Najczęściej powtarzające się błędy Najczęściej popełnianym błędem w pierwszej etapie zadania było mylenie wzoru ogólnego ciągu (a_n) z wzorem ciągu sum częściowych (S_n). Niektórzy zdający do wyznaczenia a_n stosowali błędną zależność: $a_n = S_{n+1} - S_n$. W wielu pracach na skutek wcześniej popełnionych błędów, zdający, rozwiązując równanie $a_n = 0$, z niewiadomą n, otrzymywali liczbę ujemną lub ułamek i pozostawiali taki wynik bez komentarza. Pojawiały się też błędy rachunkowe, np. przy obliczaniu S_1, S_2, zdający nie uwzględniali znaku minus przed potęgą (kolejność wykonywania działań), oraz popełniali błędy w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Wielu zdających miało problem z wyznaczeniem pierwszego wyrazu ciągu, ponieważ nie rozumieli zależności $a_1 = S_1$. Zdarzały się, więc rozwiązania, w których zdający wyznaczali n-ty wyraz ciągu, uzależniając go od a_1 i n, a następnie wyznaczali a_{2007} i liczbę n w zależności od a_1. Nie można było wówczas ocenić, czy zdający właściwie rozumieją pojęcie ciągu i wskaźnika n-tego wyrazu.
Komentarz Rozwiązanie zadania wymagało od zdających rozumienia jednego z podstawowych pojęć związanych z ciągiem arytmetycznym – sumy n początkowych wyrazów. Zdający, którzy wyznaczyli wzór na n-ty wyraz ciągu bez trudności i poprawnie rozwiązali pozostałe polecenia. Należy zwrócić uwagę na bardzo niski poziom wykonania pierwszej umiejętności – wykorzystanie własności sum częściowych ciągów: $a_n = S_n - S_{n-1}$ oraz $a_1 = S_1$. Zadania związane z ciągiem (arytmetycznym lub geometrycznym) występowały w arkuszach egzaminacyjnych na każdym egzaminie maturalnym i bardzo niepokoi fakt, że sprawiło ono tak wiele kłopotów maturzystom.

Zadanie 6. *(4 pkt)*

Dany jest wielomian $W\left(x\right)=2x^3+ax^2-14x+b$.

a) Dla $a=0$ i $b=0$ otrzymamy wielomian $W\left(x\right)=2x^3-14x$. Rozwiąż równanie $2x^3-14x=0$.

b) Dobierz wartości *a* i *b* tak, aby wielomian *W(x)* był podzielny jednocześnie przez $x-2$ oraz przez $x+3$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2)a: • rozwiązania równania wielomianowego, • wykorzystania twierdzenia o podzielności wielomianu przez dwumian do zapisania układu równań z dwiema niewiadomymi, • rozwiązania układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
Wskaźnik łatwości zadania 0,53 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający zapisali równanie trzeciego stopnia w postaci iloczynowej, by z niej wyznaczyć rozwiązania. Rozwiązanie podpunktu b) wymagało zastosowania twierdzenia o podzielności wielomianu przez dwumian, w wyniku czego zdający otrzymywali układ równań $\begin{cases} W(-2)=0 \\ W(3)=0 \end{cases}$. Współczynniki *a*, *b* wielomianu $W\left(x\right)=2x^3+ax^2-14x+b$ obliczali, rozwiązując zapisany wcześniej układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
Najczęściej powtarzające się błędy W pierwszej części zadania zdający popełniali błędy, rozkładając wielomian na czynniki oraz rozwiązując równanie kwadratowe niezupełne, np. rozwiązując równanie $x^2-7=0$, wyznaczali deltę (często błędnie), a potem obliczali pierwiastki, stosując wzory na pierwiastki równania kwadratowego lub zapisywali tylko jedno rozwiązanie $x=\sqrt{7}$, zapominając o drugim. W drugiej części zadania wielu zdających podejmowało próby wyznaczenia wartości *a* i *b*, popełniając przy tym liczne błędy rachunkowe. Występowały one przy obliczaniu wartości $W(2)$ i $W(-3)$ oraz rozwiązywaniu układu równań $\begin{cases} W(-2)=0 \\ W(3)=0 \end{cases}$ i zupełnie niepotrzebnym wykonywaniu dzielenia wielomianu przez dwumiany: $x-2$ i $x+3$.
Komentarz W katalogu podstawowych umiejętności dla poziomu podstawowego znajduje się umiejętność rozwiązywania równań wielomianowych, w tym kwadratowych niezupełnych, a zadania związane z podzielnością wielomianu lub rozkładem wielomianu na czynniki występują corocznie na egzaminie maturalnym. Dziwią więc prace, w których zdający nie potrafili poprawnie wyznaczyć pierwiastków równania kwadratowego i zaskakują problemy, jakie mieli niektórzy zdający z wyznaczeniem wartości współczynników wielomianu *a* i *b*. Próbę rozwiązania tego zadania podjęła znakomita większość zdających. Duża część tej_grupy poprawnie wyznaczyła pierwiastki wielomianu oraz umiejętnie zastosowała twierdzenie o podzielności wielomianu przez dwumian.

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Dany jest punkt $C=(2,3)$ i prosta o równaniu $y=2x-8$ będąca symetralną odcinka BC. Wyznacz współrzędne punktu B. Wykonaj obliczenia uzasadniające odpowiedź.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardzie II 2)a: • stosowania algorytmu wyznaczania równania prostej prostopadłej do danej prostej, • rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi, • posługiwania się wzorem na współrzędne środka odcinka.
Wskaźnik łatwości zadania 0,26 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający rozwiązując zadanie wykorzystywali własności punktów symetrycznych względem prostej. Wyznaczali równanie prostej prostopadłej do prostej określonej w zadaniu, a następnie obliczali współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka łączącego punkty B i C. Zapisywali i rozwiązywali równania wykorzystujące zależności między współrzędnymi środka odcinka i jego końcami wyznaczając w ten sposób współrzędne punktu B.
Najczęściej powtarzające się błędy Rozwiązując zadanie, zdający popełniali wiele błędów rachunkowych, które miały wpływ na rozwiązanie. Między innymi źle wyznaczali współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do danej. Najczęściej zamiast współczynnika $a=-\frac{1}{2}$ zapisywano $a=-2$. Tak jak w poprzednich zadaniach występowały błędy w rozwiązywaniu układu równań liniowych. Często zdający próbowali rozwiązywać zadanie metodą graficzną i odczytywali ze sporządzonego rysunku współrzędne punktów. Przyjęta przez część zdających metoda, w której wykorzystuje się równą odległość punktów B i C od prostej $y=2x-8$, nie doprowadziła ich do rozwiązania.
Komentarz Zadanie pokazało, że zdający mają problemy z analityczną interpretacją problemów geometrycznych. Nie znają i nie potrafią zastosować podstawowych wzorów, mimo że są one zamieszczone w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych* dostępnych na egzaminie. Zdający nie mają nawyku lub nie potrafią sporządzać rysunków pomocniczych do zadań. Poprawnym, to jest zgodnym z warunkami zadania rysunkiem, na podstawie własności symetrii osiowej lub takim, na którym zaznacza się, że symetralna jest prostopadła do odcinka i przechodzi przez jego środek sporządza się plan rozwiązania zadania. Brak rysunku powoduje, iż zdający nie widzą zależności między punktem i jego obrazem w symetrii lub nie potrafią skorzystać z własności symetralnej odcinka. Z wielu przedstawionych prób rozwiązań widać, że piszący nie mieli pomysłu na rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Na stole leżało 14 banknotów: 2 banknoty o nominale 100 zł, 2 banknoty o nominale 50 zł i 10 banknotów o nominale 20 zł. Wiatr zdmuchnął na podłogę 5 banknotów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na podłodze leży dokładnie 130 zł. Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Sprawdzane umiejętności

Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w standardzie III.1)a:

- budowania modelu matematycznego dla sytuacji opisanej w zadaniu

oraz

- stosowania wzorów adekwatnych do zbudowanego modelu – standard II.2)a
- obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia losowego z zastosowaniem twierdzenia klasyczna definicja prawdopodobieństwa – standard II.2)a

Wskaźnik łatwości zadania

0,34 – trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdecydowana większość podejmujących próbę rozwiązania zadania poprawnie wyznaczała liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych oraz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających (kombinacje). Korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa, zapisywała prawdopodobieństwo szukanego zdarzenia w postaci ułamka nieskracalnego.

Najczęściej powtarzające się błędy

Część zdających nie potrafiła prawidłowo przeanalizować warunków zadania. Zaskakującym błędem było stwierdzenie, że kwoty 130 zł nie można wybrać spośród nominałów, które opisano w zadaniu, i w związku z tym jest to zdarzenie niemożliwe lub zapisanie, że taką sumę można otrzymać tylko na jeden sposób. Niepokoi również nieznajomość twierdzenia o mnożeniu. Zdający obliczali moc zdarzenia opisanego w zadaniu w następujący sposób: $\binom{2}{1}+\binom{10}{4}$. Często występowały błędy rachunkowe w obliczaniu symbolu Newtona $\binom{14}{5}$, a odpowiedź nie była wyrażana w postaci ułamka nieskracalnego.

Maturzyści, którzy rozwiązując zadanie, korzystali z metody drzewa, nie uwzględniali wszystkich istotnych gałęzi i bardzo rzadko doprowadzali rozwiązanie zadania do końca.

Komentarz

Zadanie pokazało, że zdający mają poważne problemy z rozwiązaniem typowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących modelu klasycznego. Nie potrafią budować modelu matematycznego zgodnego z sytuacją opisaną w treści zadania oraz mają duże kłopoty z zastosowaniem kombinatoryki. Pozostawienie odpowiedzi w postaci ułamka nieskracalnego świadczy, że nie mają zwyczaju sprawdzać, czy ich rozwiązanie jest odpowiedzią na zadane w treści zadania pytanie.

Zadanie 9. *(6 pkt)*

Oblicz pole czworokąta wypukłego *ABCD*, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 135^\circ$, a boki *AB* i *AD* mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnością opisaną w standardzie III.2)a: • interpretowania treści zadania i zapisywania warunków i zależności między bokami i kątami w opisanym w treści czworokącie oraz umiejętnością opisaną w standardzie II.2)a: • wykorzystania funkcji trygonometrycznych do obliczenia pola czworokąta.
Wskaźnik łatwości zadania 0,37 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Po sporządzeniu rysunku zdający prowadzili przekątną czworokąta, która dzieliła go na dwa trójkąty prostokątne. Stosowali funkcje trygonometryczne i twierdzenie Pitagorasa do wyznaczenia pola czworokąta.
Najczęściej powtarzające się błędy Mimo tego, że po podzieleniu czworokąta za pomocą przekątnej zdający zauważali trójkąty prostokątne nie rozwiązywali dalej zadania poprzestając na tym etapie. W przedstawionych rozwiązaniach występowały błędy w stosowaniu funkcji trygonometrycznych i obliczaniu długości odcinków z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa. Osobną grupą błędów były te, które wynikały z nieprawidłowego zastosowania zależności między długościami boków w trójkącie o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Niemała grupa zdających dzieliła czworokąt na trapez i trójkąt lub kwadrat i 2 trójkąty, czy też trzy trójkąty.
Komentarz Rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów bardzo dużym problemem, bez względu na stopień ich złożoności. W tym zadaniu zdający mieli przeprowadzić niezbyt skomplikowane rozumowanie oparte na własnościach trójkątów prostokątnych. Piszący budowali model, dzieląc czworokąt na dwa trójkąty prostokątne, ale ich warsztat matematyczny był zbyt mizerny, aby doprowadzić rozwiązanie do końca. Należy zaznaczyć, że zadanie można było rozwiązać bez stosowania funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem własności trójkątów prostokątnych: „połowa” kwadratu i „połowa” trójkąta równobocznego. Oba te trójkąty powinny być znane uczniom w gimnazjum. Symptomatycznym jest, przy tego typu zadaniach, iż zdający rzadko uzasadniają własności figur, nie powołują się też na odpowiednie twierdzenia i definicje, na których opierają swoje rozwiązanie, np. na rysunkach nie zaznaczają, że wyznaczony kąt jest prosty, ale w dalszych obliczeniach traktują trójkąt jako prostokątny.

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Dany jest graniastosłup czworokątny prosty *ABCDEFGH* o podstawach *ABCD* i *EFGH* oraz krawędziach bocznych *AE*, *BF*, *CG*, *DH*. Podstawa *ABCD* graniastosłupa jest rombem o boku długości 8 cm i kątach ostrych *A* i *C* o mierze 60°. Przekątna graniastosłupa *CE* jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim wymienione w zadaniu kąty. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardzie I.8)a,b: • sporządzić rysunek graniastosłupa i zaznaczyć kąty: nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy i kąt ostry w podstawie, • wykorzystać funkcje trygonometryczne kąta ostrego do obliczenia przekątnej podstawy i wysokości graniastosłupa oraz umiejętnością opisaną w standardzie II.2)a: • obliczyć pole rombu i objętość graniastosłupa.
Wskaźnik łatwości zadania 0,54 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Na sporządzonym szkicu graniastosłupa zdający zaznaczali kąt między wskazaną przekątną i płaszczyzną podstawy oraz kąt ostry podstawy. Do wyznaczenia długości przekątnej podstawy wykorzystywali własności rombu, a funkcje trygonometryczne do obliczenia wysokości graniastosłupa.
Najczęściej powtarzające się błędy Część zdających błędnie zaznaczała kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do podstawy, co powodowało, że rozwiązanie od samego początku było nieprawidłowe. Zaskakującym błędem było stosowanie wzoru na pole kwadratu do obliczenia pola rombu lub podstawienie złej wartości funkcji $\sin 60^\circ$ do prawidłowego wzoru. Błędy w stosowaniu funkcji trygonometrycznych występowały również w przypadku obliczania wysokości graniastosłupa. Pojawiały się rozwiązania, w których zdający obliczali objętość prostopadłościanu a nie graniastosłupa. Duży wpływ na poprawność rozwiązania miały liczne błędy rachunkowe, w szczególności w działaniach na pierwiastkach.
Komentarz Zadanie z geometrii przestrzennej o tak niewielkim stopniu złożoności dało zdającym możliwość wykazania się posiadaną wiedzą ze stereometrii. Wyniki uzyskane przez zdających wskazują, że dobrze opanowali tę wiedzę. Jednak i w tym zadaniu złe posługiwanie się definicjami funkcji trygonometrycznych oraz mała sprawność w wykonywaniu działań arytmetycznych uniemożliwiła wielu zdającym dojście do poprawnego, końcowego wyniku. Tego typu zadania powinny być rozwiązywane z powodzeniem przez gimnazjalistów. Nie korzystają oni z funkcji trygonometrycznych, ale z własności trójkąta, który jest „połową” trójkąta równobocznego.

Zadanie 11. (*4 pkt)*

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = x$, $a_2 = 14$, $a_3 = y$. Oblicz x oraz y, jeżeli wiadomo, że $x + y = 35$.

Sprawdzane umiejętności Zdający miał wykazać się umiejętnościami opisanymi w standardzie II.2)a: • zastosowania wzoru na n-ty wyraz w ciągu geometrycznym i zapisanie i rozwiązanie układu równań uwzględniających warunki zadania oraz umiejętnościami opisanymi w standardzie III.1)a • wybranie rozwiązania spełniającego warunki zadania.
Wskaźnik łatwości zadania 0,50 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Najczęściej uczniowie wykorzystywali własności ciągu geometrycznego do zapisania układu równań: $\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 14^2 \end{cases}$. W wielu pracach pojawił się układ: $\begin{cases} x + 14q = 35 \\ x = \frac{14}{q} \end{cases}$ gdzie q – iloraz ciągu. Po rozwiązaniu układu równań zdający wybierali tę parę liczb, która spełniała warunki zadania.
Najczęściej powtarzające się błędy Mimo że z treści zadania wynika, iż chodzi o ciąg geometryczny, zdający stosowali wzory dla ciągu arytmetycznego. Zdarzały się rozwiązania, w których zdający nie zapisywali równań, ale próbowali zgadnąć rozwiązanie zadania. Występowały błędy w rozwiązywaniu układu równań, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego. Często brakowało wyboru prawidłowej odpowiedzi zgodnej z warunkami zadania.
Komentarz Zadania, w których wykorzystuje się własności ciągów geometrycznego lub arytmetycznego są zadaniami typowymi, z którymi zdający mają do czynienia na każdym egzaminie maturalnym. Narzędzia potrzebne do rozwiązania tego typu zadań nie są skomplikowane. Wymagają one od zdających dokładnej analizy czytanego tekstu i znajomości podstawowych wzorów dotyczących ciągów lub prawidłowego odczytania ich z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych.* Napisanie układu równań nie sprawiło zdającym trudności. Pojawiły się one dopiero w trakcie jego rozwiązywania. Podobnie jak w poprzednich zadaniach mała sprawność rachunkowa wpłynęła na złe wyniki uzyskane przez zdających. Bardzo wielu maturzystów nie weryfikowało rozwiązań z warunkami zadania.

Arkusz dla poziomu rozszerzonego

Arkusz dla poziomu rozszerzonego (czas trwania egzaminu 180 minut) zawierał 11 zadań otwartych. Sprawdzały one wiadomości i umiejętności określone w standardach wymagań egzaminacyjnych dla poziomu rozszerzonego.
Zadania egzaminacyjne w tym arkuszu badały przede wszystkim umiejętność poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego oraz argumentowania i prowadzenia matematycznego rozumowania.
Tematyka zadań egzaminacyjnych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego obejmowała większość treści z podstawy programowej. Najliczniej były reprezentowane zadania dotyczące własności funkcji z wartością bezwzględną, wielomianów, funkcji trygonometrycznych i logarytmicznych, planimetrii i stereometrii, zastosowania pochodnej funkcji oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Dana jest funkcja $f(x) = |x-1| - |x+2|$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz zbiór wartości funkcji *f* dla $x \in (-\infty, -2)$.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Podaj jej miejsca zerowe.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były sprawdzane umiejętności ze standardu II.2)a: • stosowania definicji wartości bezwzględnej do przekształcenia wzoru funkcji, • przetwarzania informacji zapisanej w postaci wzoru na wykres funkcji, • obliczania miejsc zerowych funkcji, • wyznaczania zbioru wartości funkcji oraz umiejętności opisane w standardzie III.1)R • interpretowania treści zadania oraz zapisywania warunków i zależności między obiektami matematycznymi.
Wskaźnik łatwości zadania 0,63 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający stosowali definicję wartości bezwzględnej do zapisania wzoru funkcji *f* w każdym z przedziałów $(-\infty, -1), \langle -1, 1), \langle 1, +\infty)$, a następnie szkicowali jej wykres. Na podstawie sporządzonego wykresu funkcji *f* formułowali odpowiedzi w podpunktach a) i d). Miejsce zerowe funkcji obliczali, rozwiązując odpowiednie równania lub odczytując je z wykresu funkcji i sprawdzając poprawność otrzymanego wyniku za pomocą odpowiednich obliczeń.

Najczęściej powtarzające się błędy Najczęstszym błędem popełnianym przez zdających było nieprawidłowe stosowanie definicji wartości bezwzględnej, np. $\|x-1\|=x-1$ dla $x\geq 0$. Maturzyści popełniali również wiele błędów rachunkowych przy redukowaniu wyrazów podobnych. W wyniku wykonywania niepoprawnych działań otrzymywali zły wzór funkcji. W rezultacie wykresy przedstawiane przez zdających to cała „gama” wykresów różnego typu funkcji nieciągłych w punktach $x=-1$, $x=1$ lub w punkcie $x=2$ albo szkice, które nie były wykresami żadnej funkcji. Część zdających rysowała w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji $y=\|x-1\|$ i $y=\|x+2\|$. Częstym błędem popełnianym przez zdających był nieprawidłowy zapis miejsca zerowego funkcji. Zdający podawali współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią *Ox*. Bardzo nieporadnie były zapisywane odpowiedzi do podpunktu a).
Komentarz Błędy pojawiające się w rozwiązaniu tego zadania świadczą o tym, że duża część zdających nie zna i nie rozumie definicji elementarnych pojęć matematycznych takich jak wartość bezwzględna i funkcja. Powodem błędnych odpowiedzi jest nieznajomość podstawowych własności funkcji, których zdający uczyli się już w gimnazjum, takich jak miejsce zerowe, zbiór wartości. Niepokojący jest brak sprawności rachunkowej maturzystów, zwłaszcza nieumiejętność zmiany znaków przy opuszczaniu nawiasów. Dużym problemem okazał się język matematyczny, którym zdający zapisywali swoje odpowiedzi. Próbując używać języka symbolicznego, robili dużo błędów.

Zadanie 2. (*5 pkt*)

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(5-x\right)>\log_{\frac{1}{3}}\left(3\left(x+1\right)\right)$.

Sprawdzane umiejętności
W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II. 2)R:
- rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych,
- rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych.

Wskaźnik łatwości zadania

0,61 – umiarkowanie trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających
Rozwiązanie tego zadania zdający rozpoczynali od ustalenia dziedziny nierówności, po czym sumę logarytmów z lewej strony nierówności zastępowali logarytmem iloczynu. Opuszczając znak logarytmu, korzystali z monotoniczności funkcji logarytmicznej i rozwiązywali nierówność wielomianową. Następnie wyznaczali część wspólną zbioru rozwiązań tej nierówności i dziedziny.

Najczęściej powtarzające się błędy
Przystępując do rozwiązania zadania, zdający zapominali o wyznaczeniu dziedziny nierówności lub jeśli podejmowali próby jej wyznaczenia, to popełniali błędy, rozwiązując układ trzech nierówności bądź wyznaczając część wspólną zbiorów. Zdający mieli kłopoty z prawidłowym wykonaniem działań na logarytmach, mimo że odpowiednie wzory znajdują się w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych* dostępnych w czasie egzaminu. Nie korzystali prawidłowo z monotoniczności funkcji logarytmicznej, zapominając o zmianie zwrotu nierówności przy opuszczaniu logarytmów. Wiele błędów popełniali w trakcie rozwiązywania nierówności wielomianowej. Zapominali o wyznaczeniu części wspólnej zbioru rozwiązań tej nierówności i dziedziny. Część piszących rozwiązywała równanie logarytmiczne zamiast nierówności.

Komentarz
Zadanie nie wymagało przeanalizowania sytuacji problemowej i zaplanowania rozwiązania, lecz rozwiązania typowej nierówności logarytmicznej. Czytelny kontekst zadania dawał zaś szanse wszystkim, którym nieobce było pojęcie logarytmu i własności działań na logarytmach. Zdający, rozwiązując zadanie, mieli do wykonania czynności typowe, wyćwiczone w szkole, polegające na wykorzystaniu znanych własności algorytmów. Popełniane błędy świadczą o tym, że zdający nie opanowali w wystarczającym stopniu umiejętności rozwiązywania nierówności logarytmicznych.
Ci spośród zdających, którzy mniej szablonowo podchodzili do rozwiązywanych zadań, zauważyli, że można było je rozwiązać prostszym sposobem. Po poprawnym wyznaczeniu dziedziny i wykorzystaniu praw działań na logarytmach otrzymywali nierówność kwadratową, co bardzo im ułatwiało rozwiązanie zadania. Smutny jest fakt, iż zauważali to tylko nieliczni.

Zadanie 3. (*5 pkt*)

Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

Sprawdzane umiejętności • W zadaniu była badana umiejętność ze standardu III.1)a – interpretowania treści zadania i zapisywania warunków i zależności między obiektami matematycznymi oraz umiejętności ze standardu II.2)a • stosowania i przekształcania wzorów związanych z objętością brył obrotowych, • obliczania objętość brył obrotowych, • rozwiązywania równań liniowych.
Wskaźnik łatwości zadania 0,69 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Po sporządzeniu rysunku pomocniczego zdający wskazywali zależność między promieniem podstawy stożka i jego wysokością, a następnie zapisywali objętość kapsuły jako sumę objętości stożka i półkuli. Wykorzystując zależność między objętością stożka i kapsuły, otrzymywali równanie liniowe z jedną niewiadomą, z którego wyznaczali promień podstawy stożka, po czym obliczali objętość kapsuły lądownika.
Najczęściej powtarzające się błędy Część zdających miała kłopoty z poprawną interpretacją treści zadania. Na sporządzonych rysunkach pomocniczych zdający pomijali półkulę, jako części kapsuły, a niektórzy wydrążali półkulę w stożku. Piszący stosowali złe wzory na objętości brył, nieprawidłowo zapisywali zależność między objętością stożka i objętością kapsuły, np. zakładali, że objętość kapsuły jest połową objętości stożka, a w trakcie rozwiązywania ułożonego równania, nawet prawidłowego, robili wiele błędów. Końcową objętość kapsuły podawali w zależności od promienia podstawy stożka, a nawet w zależności od tangensa kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy, popełniali także wiele błędów rachunkowych przy obliczaniu objętości kapsuły lądownika.
Komentarz Do rozwiązania tego zadania potrzebne były tylko wiadomości i umiejętności z poziomu podstawowego. Większość zdających poprawnie zinterpretowała treść zadania i dobrze zapisała zależności między objętościami brył. W dalszej części rozwiązania maturzyści zmagali się, z różnym zresztą powodzeniem, z bezbłędnym rozwiązaniem równania opisującego stosunek objętości stożka i kapsuły oraz z obliczeniem objętości kapsuły. Niepokojący jest fakt, że część zdających nie korzystała z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych* w wyniku czego występują błędy w stosowanych wzorach.

Zadanie 4. (*3 pkt*)

Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II.2)a: • stosowania odpowiedniego twierdzenia, np. cosinusów do wyznaczenia cosinusa kąta, • stosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do obliczania sinusa danego kąta.
Wskaźnik łatwości zadania 0,73 – łatwe
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Po sporządzeniu rysunku pomocniczego i wprowadzeniu oznaczeń zdający korzystali z twierdzenia cosinusów do zapisania równania, w którym niewiadomą był cosinus szukanego kąta, a następnie obliczali jego wartość. Do obliczenia sinusa kąta wykorzystywali jedynkę trygonometryczną.
Najczęściej powtarzające się błędy Bardzo niepokojącym błędem, który popełniali zdający, było założenie, że trójkąt dany w zadaniu jest prostokątny. Zdający wyznaczali przy tym założeniu wartości funkcji sinus i cosinus wskazanego kąta. W swoich rozwiązaniach nieprawidłowo stosowali twierdzenie cosinusów, np. $1=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-3\cos\alpha$, a następnie popełniali błędy rachunkowe przy obliczaniu cosinusa kąta α. Mylili argument funkcji trygonometrycznej z jej wartością, np. $\cos\alpha=\frac{7}{8}=61^\circ$, podawali w odpowiedzi liczby większe od 1, np. $\cos\beta=\frac{31}{24}$, nie odrzucali w końcowej odpowiedzi ujemnej wartości sinusa obliczanego kąta.
Komentarz Zadanie to jest trzecim już typowym zadaniem, osadzonym w jasnym i czytelnym dla zdającego kontekście. Do jego rozwiązania potrzebna była znajomość elementarnych własności trójkąta oraz podstawowych własności funkcji trygonometrycznych. Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów i obliczeniu cosinusa kąta rozwiązanie dalszej części zadania wymagało zastosowania wiadomości i umiejętności z poziomu podstawowego. Typowym błędem, jaki popełniali zdający podczas rozwiązywania tego zadania, był brak poprawnej interpretacji jego treści. Niektórzy zdający zakładali, że dany trójkąt jest prostokątny (bez sprawdzenia), inni nie przeanalizowali dokładnie treści zadania i nie zauważyli, że kąt, dla którego mieli obliczyć wartości funkcji sinus i cosinus, jest ostry, więc wartości obu funkcji powinny mieć znak dodatni, a często błąd wynikał z niesprawdzenia zgodności odpowiedzi z warunkami zadania.

Zadanie 5. (*7 pkt*)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Sprawdzane umiejętności

W zadaniu były badane umiejętności ze standardu III.1)c:

- przetwarzania informacji podanej w formie opisu słownego do postaci ułatwiającej rozwiązanie zadania - ilustracja graficzna,
- wyznaczania równania prostej

oraz umiejętność opisana w standardzie II.2)a:

- rozwiązywania układu równań z dwiema niewiadomymi, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego.

Wskaźnik łatwości zadania

0,34 – trudne

Typowe poprawne odpowiedzi zdających

Zdający obliczali współrzędne punktów wspólnych paraboli z osią Ox oraz współrzędne jej wierzchołka i zgodnie z poleceniem, rysowali wykres funkcji kwadratowej. Następnie rysowali trójkąt. Współrzędne wierzchołków trójkąta obliczali jednym z dwóch sposobów. Część zdających powoływała się na równość boków trójkąta i stosując wzór na odległość dwóch punktów na płaszczyźnie oraz wykorzystując fakt, że punkty należą do wykresu danej funkcji, zapisywała układ równań. Druga grupa korzystała z własności, że prosta zawierająca jeden z boków trójkąta jest nachylona do osi Ox pod kątem 60° i należy do niej punkt C. Zdający otrzymywali zatem układ równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno było stopnia pierwszego a drugie stopnia drugiego i z niego obliczali współrzędne drugiego wierzchołka trójkąta. Do wyznaczenia współrzędnych trzeciego wierzchołka trójkąta wykorzystywali fakt, że parabola ma oś symetrii.

Najczęściej powtarzające się błędy

Zdający po wyznaczeniu wierzchołka paraboli i naszkicowaniu paraboli oraz trójkąta mieli kłopot z wybraniem metody rozwiązania. Przy zastosowaniu pierwszego z opisanych sposobów zdający zapisywali tylko warunek $|AB| = |AC| = |BC|$. Niektórzy korzystali ze wzoru na odległość punktów i na tym rozwiązanie się kończyło. Ci, którzy poprawnie zapisali układ równań popełniali błędy w przekształceniach wyrażeń algebraicznych.

Komentarz

Rozwiązanie tego zadania sprawiło zdającym dużo kłopotów, mimo że jest to zadanie, do którego rozwiązania wystarczyły tylko wiadomości i umiejętności z poziomu podstawowego. Podobnie jak w większości zadań jednym z ważniejszych powodów niepowodzeń zdających był brak umiejętności sprawnego wykonywania przekształceń wyrażeń algebraicznych i popełniane przez nich błędy rachunkowe. Zdający, stosując metody geometrii analitycznej, nie zauważyli metod najprostszych rachunkowo.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,85$ i $P(B)=0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B)\geq 0,8$.

Sprawdzane umiejętności • W zadaniu była badana umiejętność ze standardu III.2)R – przeprowadzania rozumowania matematycznego opartego na własnościach prawdopodobieństwa.
Wskaźnik łatwości zadania 0,34 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający korzystali z własności prawdopodobieństwa $P(A\cup B)\leq 1$ i po przekształceniu wzoru szacowali $P(A\cap B)$. Kolejny etap rozwiązania to oszacowanie prawdopodobieństwa warunkowego i stwierdzenie prawdziwości tezy.
Najczęściej powtarzające się błędy Przeważająca liczba błędnych rozwiązań tego zadania zawierała założenie, że zdarzenia A i B są niezależne. Zdający błędnie zakładali, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B jest równe 1. Pojawiały się rozwiązania, w których zdający próbowali oszacować prawdopodobieństwo $P(A'|B)$. Powodowało to problemy w stosowaniu znanych własności prawdopodobieństwa.
Komentarz Zadanie wymagało od zdających przeprowadzenia pełnego dowodu nierówności dotyczącej prawdopodobieństwa warunkowego. Rozwiązanie zadania sprowadzało się do umiejętności oszacowania prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń. Trudno znaleźć uzasadnienie dla faktu, iż większość błędnych rozwiązań zawierała dodatkowe założenie, że zdarzenia A i B są niezależne. Zadanie wymagające dowodu pewnej własności prawdopodobieństwa pojawia się w arkuszu dla poziomu rozszerzonego kolejny raz. Miejmy więc nadzieję, że po tegorocznym egzaminie wszystkim uczącym będzie towarzyszyć refleksja, że warto rozwiązywać zadania, w których należy prowadzić rzetelne rozumowanie i budować poprawne dowody. Ogólnie można zauważyć, że zadania, w których zdający ma przeprowadzić rozumowanie matematyczne, są pomijane przez wielu zdających.

Zadanie 7. (*7 pkt*)

Dany jest układ równań: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$.

Dla każdej wartości parametru *m* wyznacz parę liczb (x, y), która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

Sprawdzane umiejętności • W zadaniu była badana umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych z parametrem – ze standardu II.2)a oraz umiejętności opisane w standardach III.1)a oraz III.1)b: • interpretowania treść zadania i zapisywania zależności między obiektami matematycznymi, • stosowania pochodnej funkcji do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.
Wskaźnik łatwości zadania 0,30 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający rozwiązywali układ równań metodą wyznaczników i zapisywali sumę rozwiązań układu równań jako funkcję parametru *m*, następnie obliczali pochodną tej funkcji i jej miejsca zerowe. Po stwierdzeniu, że jedno z miejsc zerowych pochodnej nie należy do danego przedziału, uzasadniali, że w drugim miejscu zerowym pochodnej istnieje maximum funkcji. Na tej podstawie wyciągali wniosek, że funkcja przyjmuje najmniejszą wartość w jednym z końców przedziału. Po obliczeniu wartości funkcji na końcach przedziału zapisywali odpowiedź.
Najczęściej powtarzające się błędy Piszący robili dużo błędów, rozwiązując układ równań. Ci spośród zdających, którzy nie rozwiązywali układu równań metodą wyznaczników, popełniali ich szczególnie dużo. Złe wyznaczenie wartości x, y powodowało w konsekwencji, że zdający rozwiązywali inne zadanie, często uproszczone (np. funkcja f była liniowa). Robili błędy w obliczaniu pochodnej funkcji wymiernej i błędnie przeprowadzali jej analizę (źle wyznaczone przedziały monotoniczności funkcji, punkty podejrzane o ekstremum). Niepokoi fakt, że w prezentowanych rozwiązaniach maturzyści nie umieszczali uzasadnienia, wykazującego że dla danej wartości parametru *m* funkcja osiąga najmniejszą wartość. Często występowały błędy rachunkowe przy obliczaniu wartości funkcji dla danych argumentów.
Komentarz Do rozwiązania tego zadania potrzebne były umiejętności związane z rozwiązywaniem układów równań liniowych z parametrem, obliczania pochodnych funkcji wymiernych i wyznaczania najmniejszej wartości funkcji w przedziale domkniętym. Zdający popełniali liczne błędy przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, co powodowało nieprawidłowe rozwiązanie układu równań oraz przy obliczaniu pochodnej funkcji. Otrzymywali zatem często funkcję znacznie prostszą lub popełnione błędy utrudniały rozwiązanie zadania. Zadania optymalizacyjne występują w arkuszach egzaminacyjnych na maturze oraz na próbnych egzaminach maturalnych co roku, mimo tego duża grupa zdających nie opanowała umiejętności stosowania pochodnej do ich rozwiązywania.

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f\left(x\right)=\dfrac{\sin^2 x-\left|\sin x\right|}{\sin x}$ dla $x\in\left(0,\,\pi\right)\cup\left(\pi,\,2\pi\right)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji *f* .
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji *f*.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II.2)a**:** • przekształcania wyrażeń z wartością bezwzględną, • szkicowania wykresów funkcji trygonometrycznych, • rozwiązywania równań trygonometrycznych.
Wskaźnik łatwości zadania 0,55 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Po zastosowaniu definicji wartości bezwzględnej i przekształceniu do prostszej postaci wzoru funkcji zdający szkicowali jej wykres w danych przedziałach. Następnie rozwiązywali w odpowiednich przedziałach równanie trygonometryczne lub odczytywali miejsca zerowe z wykresu i sprawdzali otrzymane wyniki.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający nieprawidłowo stosowali definicję wartości bezwzględnej do przekształcenia wzoru funkcji *f* do postaci, która umożliwiała sporządzenie wykresu. Na postawie przedstawionych rozwiązań można wywnioskować, iż zdający rysowali wykres bez uwzględnienia przedziałów, w których funkcja jest określona, oraz nie opanowali umiejętności wykonywania elementarnych przekształceń wykresu funkcji trygonometrycznej. Odpowiadając na pytanie zawarte w podpunkcie b), zdający wyznaczali miejsca zerowe funkcji bez uwzględnienia jej dziedziny lub niedokładnie odczytywali je z wykresu.
Komentarz Część zdających nie potrafiła zastosować definicji wartości bezwzględnej do przedstawionej funkcji. Najczęściej popełniany błąd to zapis $\left|\sin x\right|=\sin x$ dla $x\ge 0$. Wielu piszących nie radziło sobie ze szkicowaniem wykresu funkcji trygonometrycznej, nie skorzystali również z wykresów umieszczonych w dostępnym na egzaminie zestawie wzorów.

Zadanie 9. (*3 pkt*)

Przedstaw wielomian $W(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

Sprawdzane umiejętności • W zadaniu była badana umiejętność ze standardu III.1)c – przetwarzania informacji przedstawionej w postaci wzoru w inną postać ułatwiającą rozwiązanie.
Wskaźnik łatwości zadania 0,26 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Większość zdających zapisywała dany wielomian w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden: $W(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$. Po wykonaniu mnożenia i uporządkowaniu sumy piszący porównywali odpowiednie współczynniki ze współczynnikami wielomianu podanego w treści zadania. Stwierdzili, że zgodnie z treścią zadania współczynniki b i d muszą być liczbami o różnych znakach, np. $b=1$ oraz $d=-1$, otrzymywali układ równań, z którego obliczali a i c. Nieliczni rozwiązywali zadanie poprzez pogrupowanie odpowiednich wyrazów wielomianu i wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias.
Najczęściej powtarzające się błędy Zdający po zapisaniu wielomianu w postaci $W(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ popełniali błędy rachunkowe przy mnożeniu wielomianów stopnia drugiego i przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Nie zauważali wniosków nasuwających się z zapisu $bd=-1$ i w związku z tym mieli trudności z rozwiązaniem układu czterech równań z czterema niewiadomymi lub w ogóle nie przystępowali do jego rozwiązania.
Komentarz Większość zdających nie wykorzystała najprostszej metody rozwiązania tego zadania, czyli grupowania wyrazów wielomianu i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias. Można wyciągnąć wniosek, że umiejętność rozkładu wielomianu na czynniki metodą grupowania, mimo że jest ona zawarta w podstawie programowej dla poziomu podstawowego, nie została opanowana w stopniu wystarczającym przez zdających egzamin na poziomie rozszerzonym. Ze sposobu w jaki piszący rozpoczynali rozwiązywanie zadania wynika, że w szkole zadania tego typu były rozwiązywane metodą opisaną powyżej (w typowych odpowiedziach zdających).

Zadanie 10. (*4 pkt*)

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

Sprawdzane umiejętności • W zadaniu była badana umiejętność ze standardu II.2)R – analizowania sytuacji podanej w zadaniu i zapisania równania opisującego stosunek odpowiednich figur płaskich, • podawania opisu matematycznego danej sytuacji – umiejętność opisana w standardzie III.1)a oraz umiejętności opisane w standardzie II.2)a: • obliczania wartości funkcji trygonometrycznej, • wyznaczania miary kąta, znając wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta.
Wskaźnik łatwości zadania 0,66 – umiarkowanie trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Po wykonaniu rysunku pomocniczego i wprowadzeniu oznaczeń zdający zapisywali związek między polem koła i polem rombu. Następnie korzystając z tego, że koło jest wpisane w romb stwierdzali, że wysokość rombu jest równa średnicy koła. Wykorzystując te fakty zapisywali równanie, z którego wyznaczali zależność między promieniem koła a długością boku rombu. Kolejną czynnością było obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta ostrego rombu i podanie miary tego kąta.
Najczęściej powtarzające się błędy W rozwiązaniach przedstawionych przez maturzystów najczęstszym błędem było nieprawidłowe określenie funkcji trygonometrycznej kąta ostrego rombu. Występowały również błędy w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, które powodowały, że zdający nie byli w stanie wyznaczyć miary szukanego kąta.
Komentarz Z analizy wyników egzaminu wynika, że około 80% zdających poprawnie przeprowadziła analizę warunków zadania. Piszący podali opis matematyczny danej sytuacji, zapisując poprawne równanie, ale niestety popełniali błędy w trakcie rozwiązywania. Do rozwiązania tego zadania wystarczyły tylko wiadomości i umiejętności z poziomu podstawowego. Mimo, że zadanie dotyczyło zagadnień z geometrii płaskiej to wpływ na jego rozwiązywalność miała algebra, a dokładniej umiejętność wykonywania przekształceń na wyrażeniach algebraicznych.

Zadanie 11. *(4 pkt)*

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

Sprawdzane umiejętności W zadaniu były badane umiejętności ze standardu II.2)a: • stosowania własności ciągu arytmetycznego do uzasadniania zależności między obiektami matematycznymi, • stosowania wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, • obliczania granicy ciągu.
Wskaźnik łatwości zadania 0,44 – trudne
Typowe poprawne odpowiedzi zdających Zdający stosowali własności sum częściowych ciągu arytmetycznego do wyznaczenia wzoru na n-ty wyraz danego ciągu (a_n). Następnie obliczali pierwszy wyraz i różnicę ciągu, którego wyrazami są wyrazy o numerach parzystych ciągu (a_n). Kolejną czynnością było obliczenie sumy pięćdziesięciu wyrazów tego ciągu. Do obliczenia granicy w podpunkcie b) zdający podstawiali wzór na sumę n wyrazów, a następnie dzielili licznik i mianownik ułamka przez n^2.
Najczęściej powtarzające się błędy Mimo, że zdający mieli w czasie egzaminu do dyspozycji zestaw wybranych wzorów mylili wzór na sumę n wyrazów ciągu ze wzorem na n-ty wyraz ciągu. Wykonując niepoprawnie przekształcania wyrażeń algebraicznych otrzymywali błędne wartości pierwszego wyrazu ciągu (a_n) i jego różnicy. Maturzyści niewłaściwie określali ciąg o numerach parzystych – źle wyznaczali różnicę tego ciągu, liczbę jego wyrazów, często nawet wartość pierwszego wyrazu. W konsekwencji nie obliczyli bezbłędnie sumy $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100}$.
Komentarz Problem przedstawiony w tym zadaniu był dla maturzystów bardzo trudny. Być może sposób zapisania ciągu (a_n) – za pomocą wzoru na ciąg sum częściowych (S_n) spowodował, że zdający nie poradzili sobie z jego rozwiązaniem. Wszystkie czynności odnoszące się do obliczania sumy 50 początkowych wyrazów danego ciągu o numerach parzystych były dla piszących trudne, chociaż do rozwiązania podpunktu a) wystarczyły tylko wiadomości i umiejętności z poziomu podstawowego. Obliczenie granicy ciągu okazało się umiejętnością łatwą. Przeważająca grupa (około 82%) maturzystów rozwiązała to polecenie bezbłędnie.

PODSUMOWANIE

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zawierały zadania otwarte o zróżnicowanym stopniu trudności. Tematyka zadań w arkuszach obejmowała wszystkie treści *Podstawy programowej*.

Na podstawie analizy wyników egzaminu maturalnego z matematyki oraz uwag egzaminatorów można stwierdzić, że maturzyści:

- Wykazali się umiejętnością budowania modelu matematycznego dla sytuacji opisanej w zadaniu oraz poprawnego wyboru algorytmu rozwiązania.
- W zadowalającym stopniu wykazali się znajomością podstawowych definicji, twierdzeń i pojęć związanych z geometrią. Swobodnie posługiwali się twierdzeniem Pitagorasa, twierdzeniem cosinusów oraz własnościami trójkątów i czworokątów.
- Wykazali się znajomością definicji funkcji i ich własności. Dotyczyło to w szczególności funkcji kwadratowej, logarytmicznej oraz funkcji trygonometrycznych.
- Dobrze wykonywali obliczenia procentowe transakcji kupna i sprzedaży akcji w biurze maklerskim, wykorzystując informacje ilościowe i jakościowe z tabeli.
- Dobrze opanowali i z powodzeniem stosowali metody rozwiązywania prostych równań wielomianowych, ale mieli trudności z wykorzystaniem własności ciągów.

Do najsłabiej opanowanych umiejętności należy zaliczyć:

- Przedstawianie toku rozumowania w postaci wyrażenia algebraicznego lub równania.
- Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych z zastosowaniem twierdzenia klasyczna definicja prawdopodobieństwa.
- Popełnianie błędów rachunkowych w trakcie przekształcania wyrażeń algebraicznych, które uniemożliwiały zdającym osiągnięcie poprawnego wyniku.
- Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych do obliczania pól i objętości figur geometrycznych.
- Rozwiązywanie zadań z funkcją, w której wystąpiła wartość bezwzględna. Szkicowanie wykresów i badanie własności tych funkcji sprawiało zdającym kłopoty ze względu na liczne błędy w trakcie przekształcania wyrażeń algebraicznych.
- Wielu zdających wykazywało brak krytycznego podejścia do otrzymanych wyników, nie weryfikowalo otrzymanych rozwiązań z warunkami zadania.

Większość zdających opanowała umiejętność stosowania prostych algorytmów, znanych twierdzeń i definicji do rozwiązywania zadań oraz wykonywania obliczeń. Ci zdający, którzy nie znali typowego algorytmu, prowadzili konsekwentnie rozumowanie, aby znaleźć poprawne rozwiązanie. Można stwierdzić, że zdający poprawnie rozwiązywali typowe problemy o małym stopniu złożoności. W przypadku zadań nietypowych, bardziej złożonych widać, że maturzyści mają problemy już na etapie przeprowadzania analizy zadania.

Analizując arkusze maturalne można zauważyć, że poziom merytoryczny odpowiedzi był zróżnicowany, a język matematyczny jakim posługiwali się piszący był niejednokrotnie nieporadny. Były rozwiązania przemyślane, pokazujące w sposób jasny i czytelny pełne rozwiązanie. Wielu jednak zdających przedstawiało rozwiązania niepełne, nie udzielało odpowiedzi zgodnej z poleceniem, z błędami wskazującymi na to, że nieuważnie czytali treści zadań, bezkrytycznie podchodzili do uzyskiwanych wyników. Bardzo poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń. Często zdający poprawnie analizowali treść zadania, poprawnie zapisywali równania, ale różnego rodzaju błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do błędnych rozwiązań.

Należy podkreślić, że arkusz egzaminacyjny dla poziomu rozszerzonego zawierał odpowiednią liczbę zadań sprawdzających umiejętności z poziomu podstawowego, (zadania: 3, 5, 9, 10, 11a). Część obliczeniowa wszystkich tych zadań była nieskomplikowana, zdający w trakcie rozwiązywania mogli korzystać z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*. Za poprawne rozwiązanie tych zadań zdający mógł otrzymać 22 punkty co stanowiło 44% (do zaliczenia egzaminu wymagane jest co najmniej 30%).

W związku z obowiązkowym od roku 2010 egzaminem maturalnym z matematyki niezbędne wydaje się ustalenie, w jakim stopniu nauczyciele realizują treści zawarte w podstawie programowej. Potrzebna jest też refleksja na temat skuteczności procesu nauczania matematyki.