Edyta Marczewska
Henryk Dąbrowski

Matematyka jest miarą wszystkiego
Arystoteles

MOCNE I SŁABE STRONY WYKSZTAŁCENIA MATEMATYCZNEGO MATURZYSTÓW

Egzamin maturalny z matematyki ma znowu szansę stać się egzaminem obowiązkowym dla polskich maturzystów. W 2002 roku ówczesna minister edukacji zniosła obowiązek zdawania matematyki na „nowej" maturze, mimo iż rektorzy uczelni technicznych od lat zwracali uwagę na ucieczkę studentów od wymagających wysiłku umysłowego przedmiotów ścisłych. Raporty OECD również pokazywały, że polscy uczniowie czuli się bezradni wobec najprostszych problemów matematycznych. Ten stan rzeczy potwierdziły także wyniki kolejnych egzaminów maturalnych z matematyki. Zdający zazwyczaj potrafili zastosować dobrze znane algorytmy w typowym kontekście, ale mieli kłopoty z tym, co nazywamy myśleniem twórczym, z analizą problemów i interpretacją otrzymanych wyników. Większość maturzystów nie potrafiła samodzielnie zaplanować rozwiązania bardziej złożonych matematycznie problemów. Nie umiała formułować własnych hipotez i ich uzasadniać. Obecnie matematyka postrzegana jest przez większość uczniów jako przedmiot trudny, oderwany od rzeczywistości, pełny nieprzydatnych w życiu codziennym definicji i twierdzeń. A przecież nowoczesność w nauczaniu matematyki polega między innymi na tzw. upraktycznieniu rozwiązywanych problemów. Matematyka uczy logicznego myślenia i dyscypliny umysłowej, ale również przygotowuje do samodzielnego rozwiązywania problemów, pozyskiwania wiedzy i sprawnego podejmowania decyzji. Obok zadań typu *oblicz, wyznacz*, *rozwiąż* na egzaminie maturalnym i w praktyce szkolnej, pojawiają się również polecenia *sprawdź, porównaj, przedstaw, zaznacz, wybierz*, *uzasadnij*. Formułujemy zadania, w tym zadania praktyczne, które uczą modelowania matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania problemu, argumentowania i interpretowania otrzymanych wyników, pojawiają się zadania polegające na zbieraniu i analizowaniu informacji.

W maju 2009 roku do matury z matematyki przystąpiło 76 900 osób a, jak pokazują statystyki z lat 2005-2009, popularność matematyki na egzaminie maturalnym corocznie maleje.

Tegoroczne zadania egzaminacyjne badały znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych oraz formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Zadania w arkuszach z obu poziomów badały umiejętności opisane we wszystkich trzech obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. W arkuszu z poziomu podstawowego zdający mógł uzyskać 36 punktów za umiejętności opisane w II obszarze (korzystanie z informacji) oraz po 7 punktów za umiejętności opisane w I i III obszarze (odpowiednio – wiadomości i rozumienie oraz tworzenie informacji). Za rozwiązania zadań w arkuszu z poziomu rozszerzonego zdający mógł uzyskać 25 punktów za umiejętności opisane w II obszarze wymagań egzaminacyjnych, 19 punktów za umiejętności opisane w III i 6 punktów za umiejętności opisane w I obszarze. Wiadomości i umiejętności były badane z wykorzystaniem treści wszystkich dziewięciu działów podstawy programowej z matematyki dla zakresu podstawowego i dziesięciu działów podstawy programowej dla zakresu rozszerzonego.

Odpowiedzi zdających wskazują na zróżnicowany poziom opanowania wiadomości i umiejętności matematycznych, które powinien posiadać uczeń kończący szkolę pogimnazjalną. Zdający osiągnęli wysokie wyniki, rozwiązując zadania sprawdzające podstawowe wiadomości i typowe umiejętności, często kształcone już w gimnazjum. Należą do nich: wyznaczanie wartości funkcji dla danych argumentów i jej miejsca zerowego, rysowanie wykresu funkcji liniowej i odczytywanie własności funkcji z wykresu (zadanie 1 pp). Potwierdzają to także wyniki z poziomu rozszerzonego. Zdający potrafili wykorzystać pojęcia argumentu i wartości funkcji i zinterpretować otrzymane wyniki, aby uzasadnić przynależność punktu do wykresu funkcji (zadanie 1 pr). Nieco trudniejszą umiejętnością w tym zadaniu okazało się narysowanie w układzie współrzędnych zbioru opisanego układem warunków. Maturzyści umieli także wykorzystać definicję funkcji wykładniczej i narysować wykres funkcji typu $g(x)=|f(x)-2|$, a następnie, na podstawie tego wykresu, podać liczbę rozwiązań równania z parametrem (zadanie 3 pr).

Duża grupa zdających dobrze poradziła sobie z podaniem opisu matematycznego (w postaci układu równań) typowej sytuacji praktycznej i rozwiązywaniem układu równań liniowych (zadanie 2 pp). Ale już w zadaniu z poziomu rozszerzonego analiza podanych informacji i przedstawienie opisu matematycznego (w postaci funkcji) było najtrudniejszą czynnością w całym arkuszu egzaminacyjnym. Zdający mieli problem z formułowaniem wniosków wynikających z postaci badanego wyrażenia i z posługiwaniem się własnościami funkcji kwadratowej w nietypowej sytuacji praktycznej (zadanie 4 pr).
Większość maturzystów poprawnie zastosowała wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i umiała sprawdzić z definicji, czy dany ciąg jest geometryczny (zadanie 7 pp). Podobnie w zadaniu 7 z poziomu rozszerzonego zdający nie mieli trudności z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego do zapisania równania z jedną niewiadomą x. Jednak już oszacowanie ilorazu sumy 19-tu przez sumę 20-tu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego stanowiło barierę nie do pokonania dla większości zdających.
Zdający dobrze radzili sobie z zadaniami sprawdzającymi umiejętność wykonywania działań na potęgach o wykładnikach rzeczywistych (zadanie 4 pp). Mimo iż zadania typu „wykaż” z reguły budzą obawy zdających, to większość maturzystów przystępujących do egzaminu na poziomie rozszerzonym nie miała problemów z przeprowadzeniem rozumowania opartego na własnościach potęg (zadanie 5 pr).
Tegoroczni maturzyści poprawnie rozwiązywali zadania dotyczące typowych problemów geometrycznych o małym stopniu złożoności. Zdający wykazali się znajomością i rozumieniem podstawowych pojęć, twierdzeń i definicji z zakresu stereometrii i geometrii analitycznej (zadania 9 pp i pr i 11 pp i pr). Nieco więcej problemów przysporzyło zdającym rozwiązanie zadania wymagającego zauważenia zależności wynikających z podobieństwa trójkątów (zadanie 8 PP). Problem, z którym mieli uporać się maturzyści w tym zadaniu był typowy, algorytmiczny, ale kolejny raz okazało się, że rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów trudne, niezależnie od stopnia złożoności rozumowania, które powinni przeprowadzić. Podobne problemy mieli zdający z rozwiązywaniem zadania 8 z poziomu rozszerzonego, które wymagało dostrzeżenia związków miarowych w figurach płaskich. W tym zadaniu maturzyści mieli trudności z przeprowadzeniem nieskomplikowanego dowodu, wykorzystującego związek pomiędzy długością przekątnej kwadratu a długością jego boku oraz związek między odległościami środków okręgów stycznych zewnętrznie.
Jak co roku słabą stroną zdających okazały się przekształcenia algebraiczne i obliczenia arytmetyczne. Niestety, popełniane w tym zakresie błędy często utrudniały rozwiązanie zadania. Innym problemem, zarówno tej, jak i poprzednich matur, była forma udzielanych odpowiedzi, zwłaszcza przez zdających na poziomie podstawowym. Cieszyły rozwiązania przemyślane, pokazujące w sposób jasny i czytelny pełne zrozumienie problemu. Wielu zdających przedstawiało jednak rozwiązania niepełne, nie udzielało odpowiedzi zgodnej z poleceniem lub nie weryfikowało jej poprawności. Analizując prace maturzystów można zauważyć, że poziom merytoryczny odpowiedzi był zróżnicowany, a język matematyczny, jakim posługiwali się piszący, był niejednokrotnie nieporadny, a czasami prowadził do sprzeczności z wykonanymi wcześniej przekształceniami.

Również w tym roku, maturalne arkusze egzaminacyjne z matematyki zawierały wyłącznie zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi, a więc takie, które wymagały od zdających wytworzenia całego rozwiązania, często zaplanowania ciągu powiązanych ze sobą logicznie czynności, następnie zrealizowania ich, a wreszcie poddania krytycznej ocenie uzyskanych rezultatów. Właśnie taka konstrukcja zadań z matematyki daje zdającym duże pole do popisu. Analizując rozwiązania zdających daje się zawsze wyłonić statystycznie najczęściej spotykane sposoby rozwiązań, niemniej jednak prawie zawsze daje się też dostrzec rozwiązania nieszablonowe, w których widać oryginalny pomysł na rozwiązanie zadania. Warto w tym miejscu pokazać autentyczne rozwiązania zdających, zarówno te typowe, najczęściej spotykane, jak i te wyjątkowe, spotykane znacznie rzadziej. Przytoczymy rozwiązania wybranych zadań z obydwu poziomów.

W zadaniu 2 z poziomu podstawowego większość poprawnych rozwiązań polegała na zapisaniu układu równań wynikających z treści zadania, przy czym o ile pierwszą informację podaną w treści zadania: „Dwaj rzemieślnicy przyjęli zlecenie wykonania wspólnie 980 detali. Zaplanowali, że każdego dnia pierwszy z nich wykona m, a drugi n detali. Obliczyli, że razem wykonają zlecenie w ciągu 7 dni”, zdający najczęściej bezbłędnie zapisywali w postaci równania:

$7(m+n)=980$ lub (po przeliczeniu na jeden dzień) $m+n=140$, to o tyle z zapisaniem w postaci równania drugiej informacji: „Po pierwszym dniu pracy pierwszy z rzemieślników rozchorował się i wtedy drugi, aby wykonać całe zlecenie, musiał pracować o 8 dni dłużej niż planował, (nie zmieniając liczby wykonywanych codziennie detali)”, zdający nie radzili sobie już tak łatwo. Najczęściej pojawiało się tu poprawne równanie $m+15n=980$ lub znacznie rzadziej $6m=8n$. W tym miejscu pozostawała zdającym już tylko kwestia techniczna – rozwiązanie prostego układu równań liniowych. Poprawny wynik to $m=80$ i $n=60$. Wśród rozwiązań tego zadania znaleźć można również rozwiązania sposobem arytmetycznym, niewymagające układania i rozwiązywania układu równań, a bazujące jedynie na wykonywaniu odpowiednich operacji arytmetycznych. Przykładem takiego rozwiązania jest:

$980:7=140$ – liczbę detali, jaką codziennie wykonaliby obaj robotnicy pracujący razem,

$980-140=840$ – taka liczba detali została do wykonania po pierwszym dniu pracy, a więc do wykonania przez drugiego robotnika, gdyż pierwszy pracował tylko w pierwszym dniu,

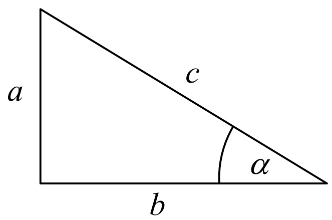
$840:14=60$ – tyle detali wykonywał dziennie drugi robotnik, gdyż sam pracował przez 14 dni, a musiał wykonać 840 detali,

$140-60=80$ – tyle detali wykonał dziennie pierwszy robotnik.

Odpowiedź: $m=80$ i $n=60$.

To krótkie rozwiązanie sprowadza się do wykonania czterech działań na liczbach naturalnych. Samo ich wykonanie, w takiej właśnie kolejności pokazuje, że rozwiązujący zadanie bardzo dokładne zrozumiał treść zadania, potrafił rozwiązać problem używając do tego aparatu matematycznego na poziomie ucznia szkoły podstawowej. Spośród zdających, którzy w ten sposób rozwiązywali to zadanie znaczna większość nie zamieszczała wyjaśnień wykonywanych przez siebie operacji (w przeciwieństwie do zdającego, którego rozwiązanie zostało przytoczone powyżej) przyjmując słusznie, że są one oczywiste.

Ciekawych spostrzeżeń dostarcza analiza sposobów rozwiązania podpunktu a) zadania 6 z poziomu podstawowego. Można je podzielić na dwa typy. W pierwszym rozwiązujący stosowali definicje sinusa i tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, po czym otrzymywali mniej lub bardziej skomplikowane nierówności między długościami boków trójkąta prostokątnego, w drugim wykorzystywali związki między funkcjami trygonometrycznymi, sprowadzając nierówność do oczywistej nierówności z funkcją (bądź funkcjami) trygonometryczną. Oto rozwiązanie z pierwszej grupy.



$$\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha < 0$$
$$\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$$
$$\frac{a}{c} < \frac{a}{b} \quad /:a$$
$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} \quad /\cdot bc$$
$$b < c$$

Nierówność $b<c$ jest prawdziwa, gdyż przyprostokątna jest zawsze krótsza od przeciwprostokątnej. W przedstawionym rozwiązaniu zwraca uwagę zwięzłość rozwiązania oraz konsekwentny wybór najkrótszej drogi zmierzającej do celu. Rozwiązujący przekształca w sposób równoważny nierówność, której prawdziwość należy uzasadnić, otrzymując w sposób oczywisty poprawną nierówność między długościami przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Sporządzenie rysunku trójkąta, jakkolwiek niekonieczne, upraszcza zapis rozwiązania.

Teraz rozwiązanie z grupy drugiej:

$\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha < 0 \Leftrightarrow \sin\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0 \Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\left(1-\dfrac{1}{\cos\alpha}\right) < 0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{\cos\alpha} < 0$, gdyż $\sin\alpha > 0$ dla $0° < \alpha < 90°$. Następnie dostaję $1 < \dfrac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha < 1$, bo $\cos\alpha > 0$ dla $0° < \alpha < 90°$.

Otrzymałem nierówność $\cos\alpha < 1$, która jest prawdziwa dla każdego kąta ostrego α.

W tym rozwiązaniu zdający posługuje się symbolem równoważności, precyzyjnie uzasadniając równoważność kolejno otrzymywanych nierówności. W poprzednim rozwiązaniu można było mieć pewne wątpliwości, czy zdający na pewno ma świadomość, że wykonywane przez niego przejścia są równoważne. Tu takich wątpliwości nie mamy.

Oryginalne, choć niestety bardzo rzadkie, jest przedstawione poniżej rozwiązanie podpunktu c) zadania 7 z poziomu podstawowego. Zdający mieli, po uprzednim obliczeniu pierwszego wyrazu i różnicy ciągu arytmetycznego, wyznaczyć taką liczbę początkowych wyrazów ciągu, aby ich suma miała wartość najmniejszą. Standardowy (najczęściej występujący) sposób rozwiązania sprowadzał się do wyznaczenia najmniejszej wartości funkcji sumy $S_n = n^2 - 12n$ określonej dla liczb całkowitych $n \geq 1$. Jednak w tym sposobie rozwiązania należy tę funkcję najpierw wyznaczyć, a następnie wyznaczyć szukaną wartość n. Poniżej przedstawiony sposób rozwiązania pokazuje, że nie jest to w ogóle konieczne.

$a_1 = -11 < 0$ i $r = 2 > 0$ - ciąg rosnący, więc od pewnego momentu wyrazy będą dodatnie. Kolejne wyrazy tego ciągu to: $a_2 = -9$, $a_3 = -7$, $a_4 = -5$, $a_5 = -3$, $a_6 = -1$, $a_7 = 1$ (dalej są już tylko wyrazy dodatnie). Najmniejsza suma jest wtedy, gdy dodamy wszystkie wyrazy ujemne, czyli szukana liczba to $n = 6$.

W pozostałych zadaniach z poziomu podstawowego występowały rozwiązania standardowe, co nie znaczy, że nie warte uwagi. Wydaje się jednak, że wartościowsze jest zaprezentowanie rozwiązań niesztampowych, pokazujących różne sposoby myślenia prowadzące do osiągnięcia celu. Zdecydowanie więcej takich przykładów można znaleźć wśród rozwiązań zadań z poziomu rozszerzonego.

Najwięcej emocji wśród zdających egzamin na poziomie rozszerzonym wzbudziło w tym roku zadanie 4. Można znaleźć, zarówno prace bardzo dobre, w których zadanie to nie zostało rozwiązane bądź zostało rozwiązane błędnie, jak też i prace słabe, gdzie w zasadzie rozwiązane było tylko to zadanie. Z jednej strony okazało się najtrudniejszym zadaniem tegorocznego egzaminu maturalnego z matematyki, z drugiej było jednym z najrzadziej pomijanych zadań. Sposoby rozwiązania tego zadania można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należy zaliczyć te rozwiązania, w których zdający rozważali dwa ciągi: ciąg liczb monet, jakie skarbnik wkładał do skarbca przez kolejne dni. Stwierdzali, że jest to ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 25 i różnicy 2. Oraz ciąg liczb monet, jakie król wyjmował przez kolejne dni ze skarbca. Zdający zapisywali, że jest to ciąg stały. Ewentualnie rozpatrywali od razu ciąg różnic liczb monet wkładanych do skarbca i wyjmowanych ze skarbca. Na tej podstawie, wykorzystując wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, ustalali wzór określający liczbę monet w skarbcu w n-tym dniu. Do tego momentu zdający budowali model matematyczny opisujący treść zadania. Potem należało już tylko wyznaczyć dzień, w którym było najmniej monet w skarbcu i najmniejszą liczbę k, dla której w każdym momencie w skarbcu znajdowała się co najmniej jedna moneta. Można to wykonać, czyniąc odpowiednie założenia dotyczące uzyskanej funkcji, bądź wykorzystując stosowne wzory lub odpowiednią postać wzoru funkcji kwadratowej. Druga grupa rozwiązań to rozwiązania „na piechotę", w których zdający systematycznie obliczali liczby monet w skarbcu w kolejnych dniach, zauważając moment, w którym w skarbcu była tylko jedna moneta, a potem było ich już tylko więcej. Tego typu rozwiązań było najwięcej. W obu tych sposobach rozwiązań możemy wyróżnić dwa typy rozwiązania: pierwszy – ze względu na sposób wyznaczania najmniejszej wartości funkcji, drugiej – ze względu na sposób ustalenia dnia, w którym było w skarbcu najmniej monet. Można też znaleźć rozwiązania, które właściwie nie należą do żadnej z tych dwóch grup. Są to rozumowania analogiczne do zaprezentowanego wcześniej przykładu rozwiązania podpunktu c) zadania 7 z poziomu podstawowego.

Przytoczmy teraz kilka przykładów rozwiązań omówionych grup.

Rozwiązanie 1. $a_1 = 25$ i $r = 2$, więc liczby monet wkładanych do skarbca przez skarbnika przez kolejne dni tworzą ciąg arytmetyczny $a_n = 25 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 23$. Ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego obliczam $S_n = \frac{25 + 2n + 23}{2} \cdot n$ – tyle monet skarbnik włożył do skarbca przez n dni. $n \cdot 50$ - tyle monet wziął król. Razem w skarbcu było $\frac{25+2n+23}{2} \cdot n - 50n + k$ monet.

$$f(n) = \frac{25+2n+23}{2} \cdot n - 50n + k = (n+24)n - 50n + k = n^2 - 26n + k$$

Funkcja osiąga najmniejszą wartość dla $n = \frac{26}{2} = 13$, czyli w 13 dniu było najmniej monet.

$f(13) = 13^2 - 26 \cdot 13 + k = 169 - 338 + k = k - 169$

$k - 169 \geq 1$ czyli $k \geq 170$

Odpowiedź. 13 dnia było w skarbcu najmniej monet, $k = 170$.

Nieznacznie różniące się, w ostatniej fazie rozwiązania, od zaprezentowanego, choć częściej spotykane, jest takie rozwiązanie (początkową część pomijamy, gdyż nie różni się w sposób istotny od poprzedniego):

Rozwiązanie 2. […] $f(n) = n^2 - 26n + k$

Aby zawsze była w skarbcu co najmniej jedna moneta, to musi być spełniony warunek

$\Delta < 0$

$(-26)^2 - 4k < 0$

$4k > 676$

$k > 169 \Rightarrow k = 170$ $\qquad\qquad$ $n_w = -\frac{-26}{2} = 13$

Odpowiedź. Najmniejsza liczba *k* to 170. Wtedy najmniej monet będzie 13-tego dnia.

Jak widać, tym razem, zdający najpierw wyznaczył najmniejszą wartość *k*, a dopiero potem dzień, w którym w skarbcu było najmniej monet. Wykonał więc polecenia zadania dokładnie w takiej kolejności, jak w treści zadania. Należy tu jednak zauważyć, że gdyby zdający nie obliczył numeru dnia, w którym była najmniejsza liczba monet, a poprzestał jedynie na wyznaczeniu $k = 170$, to rozumowania zdającego nie można byłoby uznać za w pełni poprawne, gdyż warunek $\Delta < 0$, przy braku informacji o tym, czy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 26x$ jest liczbą naturalną, nie jest poprawny.

W kolejnym rozwiązaniu z pierwszej grupy też zacytujemy jedynie ostatni fragment rozwiązania, istotnie różny od zaprezentowanych.

Rozwiązanie 3. […] $f(n) = n^2 - 26n + k = n^2 - 26n + 169 + k - 169 = \underbrace{(n-13)^2}_{\geq 0} + \underbrace{k - 169}_{\geq 1}$.

Dla $n = 13$ liczba monet będzie najmniejsza i żeby była choć jedna, to $k - 169 \geq 1$, czyli najmniejsza *k* wynosi 170.

W przytoczonym rozwiązaniu zdający wręcz wzorowo wykorzystał postać kanoniczną funkcji kwadratowej, z której wywnioskował od razu obie szukane liczby. Niestety, rozwiązań tego typu jest bardzo niewiele, a szkoda, gdyż nie jest tu zdającemu potrzebny ani wzór na wyróżnik trójmianu kwadratowego, ani też na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, przez co rozwiązanie staje się bardzo krótkie i precyzyjne.

Kolejny przykład rozwiązania różni się od poprzednich fazą początkową, tj. sposobem dochodzenia do wzoru funkcji liczby monet w skarbcu w *n*-tym dniu. Przedstawimy jedynie ten fragment rozwiązania.

Rozwiązanie 4.

$25 - 50 = -25$, $27 - 50 = -23$, $29 - 50 = -21$, […]. Jest to ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = -25$ i $r = 2$.

$$S_n = \frac{2 \cdot (-25) + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (n - 1 - 25) \cdot n = (n - 26)n$$

$f(n) = (n-26)n + k$ […]

Zdający od razu „powiązał" ze sobą oba ciągi liczb monet, tworząc w ten sposób ciąg „reszt". W tym miejscu należy zwrócić szczególną uwagę, że wielu zdających, którzy rozwiązywali zadanie w ten sposób, nie potrafiło sobie poradzić ze zmienną *k*, „wstawiając" ją błędnie do ciągu reszt, w efekcie rozpatrując ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = k - 25$ i różnicy $r = 2$.

Kolejne rozwiązania należą do drugiej z grup.

Rozwiązanie 5.

dzień	skarbnik	król	skarbiec	
<u>1</u>	<u>25</u>	50	$k+25-50=k-25$	$k_{\min}=26$
<u>2</u>	<u>27</u>	50	$k-25+27-50=k-48$	$k_{\min}=49$
3	29	50	$k-48+29-50=k-69$	$k_{\min}=70$
4	31	50	$k-69+31-50=k-88$	$k_{\min}=89$
5	33	50	$k-88+33-50=k-105$	$k_{\min}=106$
6	35	50	$k-105+35-50=k-120$	$k_{\min}=121$
7	37	50	$k-120+37-50=k-133$	$k_{\min}=134$
8	39	50	$k-133+39-50=k-144$	$k_{\min}=145$
9	41	50	$k-144+41-50=k-153$	$k_{\min}=154$
10	43	50	$k-153+43-50=k-160$	$k_{\min}=161$
11	45	50	$k-161+45-50=k-165$	$k_{\min}=166$
12	47	50	$k-165+47-50=k-168$	$k_{\min}=169$
13	49	50	$k-168+49-50=k-169$	$k_{\min}=170$
14	51	50	$k-169+51-50=k-168$	$k_{\min}=169$

Dalej już będzie dobrze, bo więcej będzie monet dokładanych niż zabieranych. Najmniej *k* musi wynosić 170. W 13 dniu będzie najmniej monet.

Zdający analizował „sytuację" w skarbcu przez kolejnych 14 dni, a w zasadzie dłużej (o czym świadczy zapis pod tabelą), zauważył, że newralgiczny dzień to 13. Dla każdego dnia z osobna wyznaczył najmniejszą liczbę *k*. Określił, choć tego nie zapisał, rekurencyjny wzór na liczbę monet w skarbcu w *n*-tym dniu. Można oczywiście takiemu rozwiązaniu zarzucać, że nie jest egzemplifikacją metody. Jest to jednak chyba zbyt poważny zarzut. Wszak to problem postawiony w zadaniu powinien być źródłem doboru sposobu jego rozwiązania, a nie odwrotnie. W tym zadaniu zdający skutecznie poradził sobie z problemem.

Oto ostatnie z rozwiązań tego zadania, jakie zaprezentujemy.

Rozwiązanie 6.

Na początku skarbnik wkłada mniej monet, niż król wyjmuje, ale skarbnik dorzuca każdego dnia o 2 monety więcej, niż poprzedniego, więc wystarczy znaleźć pierwszy dzień, kiedy skarbnik włoży tyle monet, ile wyjmie król albo więcej.

$a_1 = 25$, $r = 2$, więc $a_n = 25 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 23$

$2n + 23 \geq 50$

$2n \geq 27$

$n \geq 13{,}5$

Z tego wynika, że najgorsza sytuacja w skarbcu była trzynastego dnia, a od czternastego dnia było już tylko lepiej.

$$25+27+\ldots(2\cdot 13+23)-13\cdot 50=\frac{25+49}{2}\cdot 13-650=481-650=-169$$

Aby nie zabrakło monet (nawet w trzynastym dniu), to $k=170$.

Ten sposób rozwiązania jest bardzo oryginalny. Pokazuje, że zdający dokładnie rozumie całą sytuację opisaną w zadaniu jako proces dynamiczny, potrafi bezbłędnie wyznaczyć dzień „najgorszy" (jak sam go nazywa). Potem rozwiązanie sprowadza się już tylko do obliczenia sumy 13 kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Zdający wykorzystał tu wzór na sumę n-początkowych wyrazów takiego ciągu, jednak równie dobrze mógłby po prostu zsumować te liczy posługując się kalkulatorem. Tak jak już to wcześniej zasygnalizowaliśmy, rozwiązania takie były bardzo rzadkie, a szkoda, gdyż w ten sposób można rozwiązać najtrudniejsze zadanie egzaminu maturalnego z matematyki w tym roku, wykorzystując jedynie wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i rozwiązując prostą nierówność liniową.

W każdym z poprawnych rozwiązań zadania 5 z poziomu rozszerzonego zdający musieli zastosować własności potęg o wykładnikach rzeczywistych. Po raz pierwszy na egzaminie maturalnym z matematyki zdarzyło się, że zadanie z poleceniem „wykaż" jest zadaniem łatwym. Wydaje się, że nauczyciele umiejętnie „oswajają" uczniów z zadaniami na dowodzenie, a zdający nie opuszczają pochopnie takich zadań tylko z tego powodu, że zawierają one słowo „wykaż", czy „udowodnij". Poniżej przytoczymy kilka typowych poprawnych rozwiązań.

Rozwiązanie 1.

Założenie: $A=3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B=3^{2\sqrt{2}+3}$

Teza: $B=9\sqrt{A}$

Dowód: $9\sqrt{A}=9\cdot\sqrt{3^{4\sqrt{2}+2}}=3^2\cdot\sqrt{\left(3^{2\sqrt{2}+1}\right)^2}=3^2\cdot 3^{2\sqrt{2}+1}=3^{2\sqrt{2}+3}=B$

Zdający wyraźnie zapisał założenie, tezę i przeprowadził dowód, wychodząc od lewej strony udowadnianej równości i dochodząc do jej strony prawej. Zwykle zdający ograniczali się jedynie do dowodu.

Rozwiązanie 2. $B=3^{2\sqrt{2}+3}=3^{2\sqrt{2}+1+2}=3^{2\sqrt{2}+1}\cdot 3^2=3^{(4\sqrt{2}+2)\cdot\frac{1}{2}}\cdot 3^2=\sqrt{3^{4\sqrt{2}+2}}\cdot 9=9\sqrt{A}$

Zdający przeprowadził dowód, przechodząc od lewej do prawej strony równości, wykonując w gruncie rzeczy te same operacje co w rozwiązaniu 1.

Rozwiązanie 3.

$B=9\sqrt{A}\quad /^2$

$B^2=81A$

$\left(3^{2\sqrt{2}+3}\right)^2=81\cdot 3^{4\sqrt{2}+2}$

$3^{4\sqrt{2}+6}=3^4\cdot 3^{4\sqrt{2}+2}$

$3^{4\sqrt{2}+6}=3^{4\sqrt{2}+6}$

W tym rozwiązaniu zdający przekształcał równoważnie dowodzoną nierówność, dochodząc w rezultacie do tożsamości. Inne z rozwiązań w mniejszym lub większym stopniu sprowadzały się do zaprezentowanych. Zadanie to skutecznie różnicowało osoby, które miały elementarne braki w umiejętnościach wykonywania działań na potęgach od tych, którzy te proste umiejętności opanowali.

Zadanie 6 z poziomu rozszerzonego mogli rozwiązać jedynie ci zdający, którzy potrafili poprawnie zapisać warunki wynikające z definicji logarytmu. Dla tegorocznych maturzystów i tych z lat ubiegłych logarytmy w całości znajdują się na poziomie rozszerzonym, ale już od roku przyszłego pojęcie logarytmu (jako liczby) i własności logarytmów (poza wzorem na zamianę podstawy logarytmu) znajdą się w podstawie programowej na poziomie podstawowym. Poprawne rozwiązania zdających różniły się w zasadzie tylko sposobem ustalania tych argumentów funkcji f, dla których spełnione są warunki $2\cos x\neq 1$ i $2\cos x>0$. Jedna grupa zdających rozwiązywała te nierówności w sposób ogólny (w całym zbiorze liczb rzeczywistych), a następnie wyznaczała część wspólną zbiorów rozwiązań tych nierówności i nierówności kwadratowej $9-x^2>0$. Druga grupa od razu uwzględniała przedział $(-3,3)$, tj. zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej, ograniczając w ten sposób odczytywanie argumentów funkcji *f*, dla których spełnione są warunki $2\cos x \neq 1$ i $2\cos x > 0$ do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

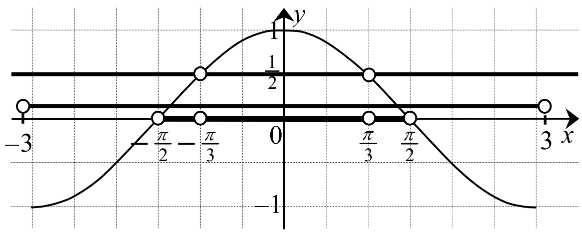
Przykładem takiego rozwiązania jest:

Rozwiązanie 1. Z definicji logarytmu wynika:

$9-x^2>0$ i $2\cos x \neq 1$ i $2\cos x > 0$

$(3-x)(3+x)>0$ i $\cos x \neq \frac{1}{2}$ i $\cos x > 0$

$x \in (-3,\,3)$ i $x \neq -\frac{\pi}{3}$ i $x \neq \frac{\pi}{3}$ i $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



Dziedziną funkcji jest więc zbiór $D_f=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.

Rozwiązania zadania 7 – poziom rozszerzony – do momentu obliczenia ilorazu ciągu przybiegały właściwie tak samo, przy czym zdający albo wykorzystywali własność ciągu geometrycznego i od razu zapisywali równanie z niewiadomą *x*, albo też wykorzystywali definicję bądź wzór ogólny ciągu, wprowadzali oznaczenie *q* ilorazu ciągu i zapisywali układ równań, który też sprowadzali do równania z jedną niewiadomą. Część druga zadania, polegająca na uzasadnieniu nierówności $\frac{S_{19}}{S_{20}}<\frac{1}{4}$, wykonywana była znacznie rzadziej, niemniej jednak wystąpiły różne, zasługujące na pokazanie, sposoby uzasadnienia. Zacytujemy jedynie te fragmenty rozwiązań, które dotyczą części drugiej rozwiązania.

Rozwiązanie 1.

$\frac{S_{19}}{S_{20}}<\frac{1}{4}$, $\frac{a_1\cdot\frac{1-4^{19}}{1-4}}{a_1\cdot\frac{1-4^{20}}{1-4}}<\frac{1}{4}$, $\frac{4^{19}-1}{4^{20}-1}<\frac{1}{4}$, $4\left(4^{19}-1\right)<4^{20}-1$, $4^{20}-4<4^{20}-1$, $-4<-1$, co jest prawdą.

W tym sposobie zdający przekształcał dowodzoną nierówność, dochodząc do nierówności prawdziwej w sposób oczywisty.

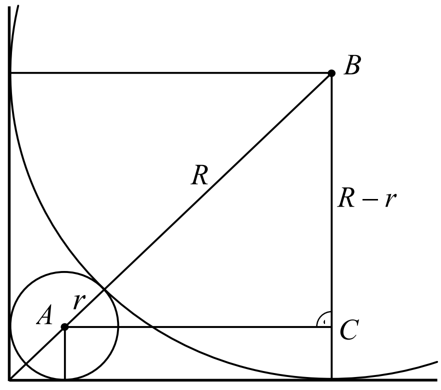
Rozwiązanie 2.

$$\frac{S_{19}}{S_{20}}=\frac{2\cdot\frac{1-4^{19}}{1-4}}{2\cdot\frac{1-4^{12}}{1-4}}=\frac{1-4^{19}}{1-4^{20}}=\frac{4^{19}-1}{4^{20}-1}<\frac{4^{19}-1}{4^{20}-4}=\frac{4^{19}-1}{4\left(4^{19}-1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Tu zdający w ładny sposób oszacował dodatni ułamek $\frac{4^{19}-1}{4^{20}-1}$ przez większy od niego ułamek $\frac{4^{19}-1}{4^{20}-4}$ (zmniejszając mianownik o 3). Sposób ten szczególnie zasługuje na podkreślenie, gdyż umiejętność szacowania wartości wyrażeń liczbowych nie jest powszechna wśród polskich maturzystów, a warto dodać, że jest to umiejętność często wykorzystywana w innych dziedzinach wiedzy, takich jak fizyka, chemia, biologia czy geografia.

Kolejnym zadaniem z poziomu rozszerzonego, którego przykłady rozwiązań warto przytoczyć, jest zadanie 8. Jest to zadanie na dowodzenie, a jednocześnie z geometrii syntetycznej. Zdający miał o tyle ułatwione zadanie, że nie musiał mozolnie interpretować treści zadania, miał sporządzony rysunek obrazujący całą sytuację. Cały dowód sprowadzał się do zapisania w formie odpowiedniej równości zależności między promieniami obu rozpatrywanych okręgów. Po poprawnym zapisaniu tej zależności następowały już czynności czysto techniczne – rachunki prowadzące do obliczenia stosunku tych promieni. Przedstawimy dwa rozwiązania ilustrujące nieco różniące się drogi dojścia do zależności.

Rozwiązanie 1.

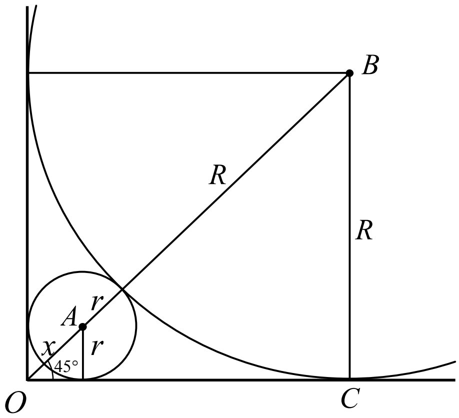


Trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny. Ze wzoru na przekątną kwadratu otrzymuję

$$R + r = (R - r)\sqrt{2}$$
$$R + r = R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$$
$$r\sqrt{2} + r = R\sqrt{2} - R$$
$$R\left(\sqrt{2} - 1\right) = r\left(\sqrt{2} + 1\right) \ / : r \ / \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)$$
$$\frac{R}{r}\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$$
$$\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$$

W przytoczonym rozwiązaniu zdający od razu zapisał zależność między promieniami okręgów, zauważając, że trójkąt ABC jest „połówką” kwadratu. Podstawą sukcesu tego rozwiązania jest umiejętne „uzupełnienie” rysunku zamieszczonego w treści zadania o odcinek łączący wierzchołek kąta prostego ze środkiem B, odcinek prostopadły do ramienia kąta łączący punkt B z tym ramieniem i wreszcie o odcinek AC równoległy do tego ramienia.

Rozwiązanie 2.



$$\begin{cases} \sin 45^\circ = \dfrac{R}{R + r + x} \\ \sin 45^\circ = \dfrac{r}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R}{R + r + x} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{r}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} r \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\left(R + r + \frac{2}{\sqrt{2}} r\right) = 2R$$
$$\sqrt{2}R + \sqrt{2}r + 2r = 2R$$
$$\left(\sqrt{2} + 2\right) r = \left(2 - \sqrt{2}\right) R$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)}{\left(2 - \sqrt{2}\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 4 + 2\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{4\sqrt{2} + 6}{2} = 2\sqrt{2} + 3$$

Tu zdający zastosował funkcję sinus i zbudował układ równań, który, umiejętnie przekształcając, doprowadził do uzyskania tezy zadania. Sposób ten jest dłuższy od poprzedniego, choć równie skuteczny.

Wyniki egzaminu maturalnego i uwagi egzaminatorów, którzy oceniali prace egzaminacyjne, pokazały, że zdający w wielu zadaniach wykazali się umiejętnością budowania modelu matematycznego dla opisanej sytuacji oraz umiejętnością poprawnego wyboru algorytmu rozwiązania. Zdający poprawnie rozwiązywali problemy typowe, o małym stopniu złożoności. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych, większość zdających miała trudności już na etapie analizy zadania. Egzamin pokazał, że w pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować (także geometrycznie). Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa.

Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. W wielu pracach raził język matematyczny, jakim posługiwali się zdający. Zwłaszcza na poziomie podstawowym był on często nieporadny, nieprecyzyjny, a stosowanie niewłaściwych symboli matematycznych prowadziło do sprzeczności w rozwiązaniu zadania. Wielu zdających nie udzielało odpowiedzi zgodnej z warunkami zadania, co wskazuje na to, że nieuważnie czytali treść zadania i bezkrytycznie podchodzili do uzyskiwanych wyników. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń. Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy w przekształceniach algebraicznych i błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych odpowiedzi.

Analiza poszczególnych zadań pokazuje, że w pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego, warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności jak:

- poprawna analiza zadania
- czytelne zapisywanie toku myślenia
- logiczne wnioskowanie
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się w rozwiązaniu na znanych algorytmach)
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki od 2010 roku*.

Matematyka jest miarą wszystkiego – w związku z obowiązkowym od roku 2010 egzaminem maturalnym z matematyki, także miarą dojrzałości do podjęcia nauki na wyższej uczelni. Dlatego warto uświadomić maturzystom, że znajomość matematyki na poziomie podstawowym to fundament logicznego myślenia w każdym aspekcie życia. Konieczne jest położenie nacisku w kształceniu matematycznym nie tylko na sprawne operowanie algorytmami, ale i na rozwijanie umiejętności modelowania matematycznego, doboru strategii rozwiązania zadania i umiejętność argumentowania i rozumowania. Ważne jest, aby nie tylko rzetelnie „przerobić” materiał nauczania, przećwiczyć określone zadania, ale i pokazać uczniom różne strategie uczenia się, studiowania matematyki. Należy wspierać w nich naturalną ciekawość i próby poszukiwania nietypowych rozwiązań, budować wiarę we własne możliwości i umiejętności.